

EJERCICIOS RESUELTOS**UNIDAD 10: DERIVADAS**

Ejercicio 1:

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

$$f'(x) = 6x - 6$$

$$2. f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$7. f(x) = x e^x$$

$$f'(x) = e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

$$8. f(x) = x \cdot 2^x$$

$$f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$$

$$9. f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$$

$$f'(x) = 2x \log_2 x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x \ln 2}$$

$$10. f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$11. f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 5)x - (x^3 + 3x^2 - 5x + 3)}{x^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2} = 2x + 3 - \frac{3}{x^2}$$

$$12. f(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{[1/(\ln 10)] - \log x}{x^2} = \frac{1 - \ln 10 \log x}{x^2 \ln 10}$$

$$13. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1(x^2 - 1) - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} - \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$14. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2}$$

$$Df(x) = \frac{1}{2} x^{(1/2) - 1} - \left(-\frac{1}{2}\right) x^{(-1/2) - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Ejercicio 2:

Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

$$15. f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6; \quad x = 1$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x; \quad f'(1) = 12$$

$$16. f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{2}; \quad x = -\frac{17}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}; \quad f'\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$17. f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2}; \quad x = 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}; \quad f'(2) = 6 + 6 - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}$$

$$18 \quad f(x) = \frac{1}{7x+1}; \quad x=0$$

$$f'(x) = \frac{-7}{(7x+1)^2}; \quad f'(0) = -7$$

$$19 \quad f(x) = \frac{2x}{x+3}; \quad x=-1$$

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \rightarrow f'(-1) = \frac{3}{2}$$

$$20 \quad f(x) = \ln(3x-1); \quad x=3$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1} \rightarrow f'(3) = \frac{3}{8}$$

Ejercicio 3:

Halla la función derivada de estas funciones:

$$28 \quad a) f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{2x}$$

$$a) f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$b) f(x) = (x^2 - 3)^3$$

$$b) f'(x) = 6x(x^2 - 3)^2$$

$$29 \quad a) f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$$

$$a) f'(x) = 1 \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$b) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$b) f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$30 \quad a) f(x) = \sqrt[3]{(x+6)^2}$$

$$a) f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+6}}$$

$$b) f(x) = (1 + e^x)^2$$

$$b) f'(x) = 2e^x(1 + e^x)$$

$$31 \quad a) f(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b) f(x) = 7^{x+1}$$

$$a) f(x) = -3(1-x^2)^{-1/2}; \quad f'(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{-3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$b) f'(x) = 7^{x+1} \cdot \ln 7$$

$$32 \quad a) f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{x}{3}$$

$$a) f'(x) = \frac{-1}{3x^2} + \frac{1}{3}$$

$$b) f(x) = \ln 3x$$

$$b) f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

$$33 \quad a) f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$a) f'(x) = \frac{1+x^2-x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$b) f'(x) = \frac{e^{2x}(7-10x)}{(1-5x)^2}$$

$$b) f(x) = \frac{e^{2x}}{1-5x}$$

$$34 \quad a) f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$a) f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$b) f(x) = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x}$$

$$b) f(x) = \ln \sqrt{x}$$

Ejercicio 4:

Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:

$$a) y = 3x^2 - 2x + 1$$

$$b) y = x^3 - 3x$$

$$a) f'(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Punto } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$b) f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 1. \text{ Puntos } (-1, 2) \text{ y } (1, -2)$$

Ejercicio 5:

Obtén los puntos donde $f'(x) = 1$ en los siguientes casos:

$$a) f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$b) f(x) = \frac{x+1}{x+5}$$

$$a) f'(x) = 2x - 3; 2x - 3 = 1 \rightarrow x = 2; f(2) = 0 \rightarrow P(2, 0)$$

$$b) f'(x) = \frac{x+5-x-1}{(x+5)^2} = \frac{4}{(x+5)^2}$$

$$\frac{4}{(x+5)^2} = 1 \rightarrow (x+5)^2 = 4 \begin{cases} x = -3; f(-3) = -1 \rightarrow P(-3, -1) \\ x = -7; f(-7) = 3 \rightarrow Q(-7, 3) \end{cases}$$

Ejercicio 6:

Halla los puntos en los que la derivada de cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \frac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = \ln(4x-1)$

a) $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2; f(2) = 0 \rightarrow P(2, 0)$

b) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} \rightarrow \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow$

$$\rightarrow (x+2)^2 = 1 \begin{cases} x = -1; f(-1) = -1 \rightarrow P(-1, -1) \\ x = -3; f(-3) = 3 \rightarrow Q(-3, 3) \end{cases}$$

c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2;$

$f(-2) = 4 \rightarrow P(-2, 4)$

d) $f'(x) = \frac{4}{4x-1} \rightarrow \frac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow x = \frac{3}{4}; f\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2 \rightarrow P\left(\frac{3}{4}, \ln 2\right)$

Ejercicio 7:

Comprueba que las siguientes funciones no tienen ningún punto en el que la derivada sea igual a 0.

a) $y = \frac{7x-3}{2}$

b) $y = 2x^3 + 6x$

c) $y = x^3 - x^2 + x$

d) $y = \frac{3x}{x-2}$

a) $f'(x) = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{7}{2} \neq 0$ para cualquier x .

b) $f'(x) = 6x^2 + 6 \rightarrow 6x^2 + 6 = 0$ no tiene solución.

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6}$ no tiene solución.

d) $f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2} \rightarrow \frac{-6}{(x-2)^2} = 0$ no tiene solución.

Ejercicio 8:

Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.

$f'(x) = -2x + 2; m = f'(-1) = 4, f(-1) = 2$

La recta es $y = 4(x+1) + 2 = 4x + 6$

Ejercicio 9:

Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

15 $y = 2x^3 + 3x^2 - 6; x = 1$

$$y' = 6x^2 + 6x; y'(1) = 12$$

16 $y = \cos(2x + \pi); x = 0$

$$y' = -2 \operatorname{sen}(2x + \pi); y'(0) = 0$$

17 $y = \frac{x}{3} + \sqrt{2}; x = -\frac{17}{3}$

$$y' = \frac{1}{3}; y'\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

18 $y = \frac{1}{7x + 1}; x = 0$

$$y' = \frac{-7}{(7x + 1)^2}; y'(0) = -7$$

19 $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}; x = \pi$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right); y'(\pi) = -\frac{1}{2}$$

20 $y = \frac{2}{(x + 3)^3}; x = -1$

$$y = 2(x + 3)^{-3} \rightarrow y' = -6(x + 3)^{-4} = \frac{-6}{(x + 3)^4}$$

$$y'(-1) = \frac{-6}{16} = \frac{-3}{8}$$

21 $y = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2}; x = 2$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}; y'(2) = \frac{23}{2}$$

22 $y = \frac{1}{\sqrt{x - 4}}; x = 8$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{(x - 4)^3}}; y'(8) = -\frac{1}{16}$$

Ejercicio 10:

Aplica las reglas de derivación a la función $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para calcular:

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa $-1, 0$ y 3 .

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

b) $f'(-1) = 11$

$f'(0) = 2$

$f'(3) = 11$

Ejercicio 11:

Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

c) $y = 2^x$

b) $y = \log_3 x$

d) $y = \sqrt{6x^5}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 5$

c) $y' = 2^x \cdot \ln 2$

b) $y' = \frac{1}{x \ln 3}$

d) $y' = \frac{1}{2}(6x^5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 30x^4 = \frac{15x^4}{\sqrt{6x^5}} = \frac{15x^2}{\sqrt{6x}}$

Ejercicio 12:

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$

b) $y = \frac{x}{3} \cdot e^{-x}$

c) $y = \left(\frac{3x-5}{2}\right)^3$

d) $y = \frac{x^2}{x-2}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{x}{3}(-1)e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{1-x}{3}\right)$

c) $f'(x) = 3\left(\frac{3x-5}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\left(\frac{3x-5}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}(3x-5)^2$

d) $f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}$