HOJA 1 DE EJERCICIOS RESUELTOS

UNIDAD 7: **FUNCIONES ELEMENTALES**

Ejercicio 1:

Representa cada una de las siguientes funciones

16. $y = 2x$

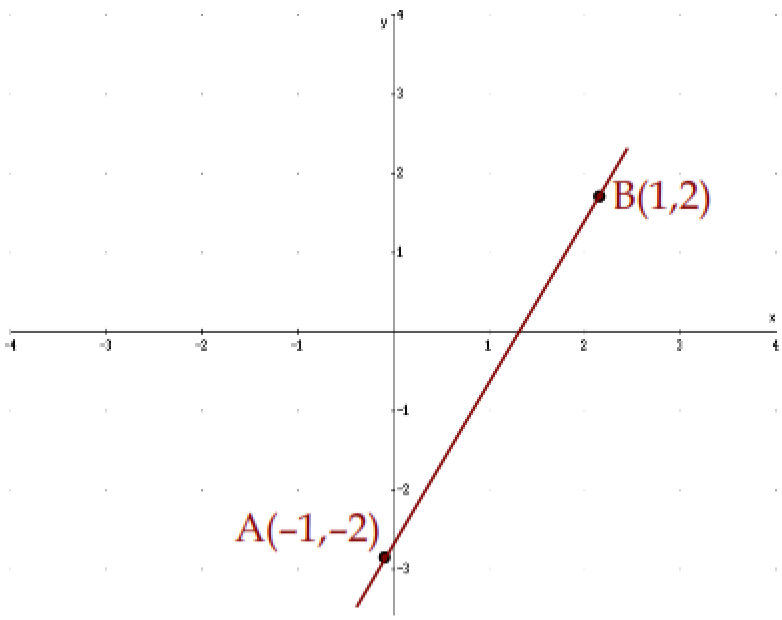
Solución:

La función dada se trata de una linea recta, ya que es de la forma y = mx+n, en dónde m es la pendiente. En nuestro caso, m=2 y n=0. Como n=0 ello quiere decir que la recta cortará al eje y en y=0.

Hacemos una tabla de valores para y=2x

x	y=2x	
–1	2(–1)=–2	$\Rightarrow$ A(–1,–2)
1	$2\cdot 1=2$	$\Rightarrow$ B(1,2)

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



17. $y = \dfrac{2x}{3}$

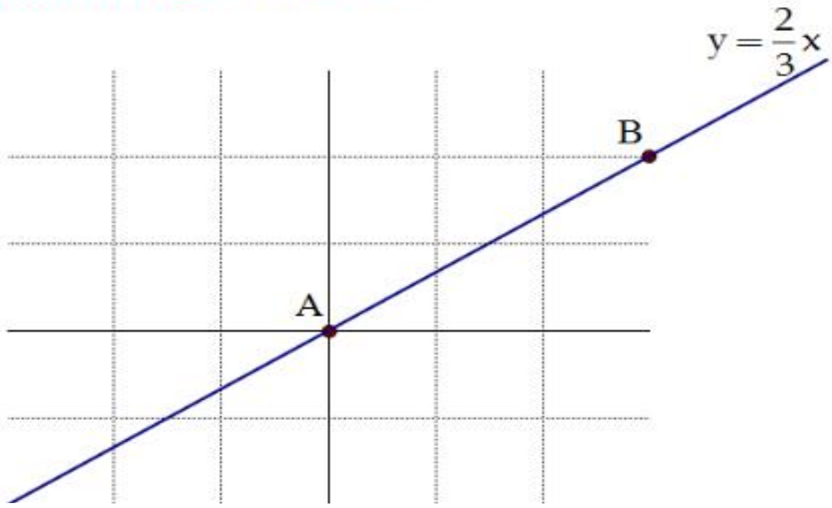
Solución:

- La función $y = \frac{2x}{3}$ se puede escribir también así: $y = \frac{2}{3}x$, o si lo prefieres de esta otra forma: $y = 0,67x$

- Ahora, como siempre en estos casos, construimos una tabla de valores para obtener dos puntos (para dibujar una línea recta no hacen falta más puntos):

x	$y = \frac{2}{3}x$	
0	0	$\Rightarrow A(0,0)$
3	2	$\Rightarrow B(3,2)$

- Por último, representamos los dos puntos en un plano cartesiano y por ellos trazamos la línea recta que buscamos:



18. $y = -2x + 3$

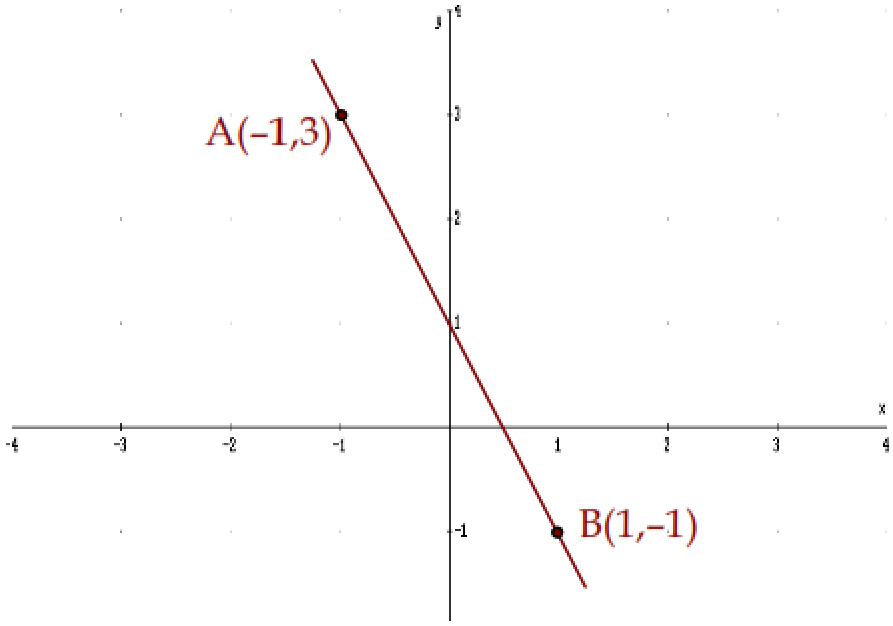
<u>Solución</u>:

La función dada es una línea recta, ya que es de la forma y = mx+n, en dónde m es la pendiente. En nuestro caso, m=–2 y n=1. Como n=1 ello quiere decir que la recta cortará al eje y en y=1.

Hacemos una tabla de valores para y=–2x+1

x	y=–2x+1	
–1	–2(–1)+1=3	$\Rightarrow$ A(–1,3)
1	$-2\cdot 1+1=-1$	$\Rightarrow$ B(1,–1)

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



Ejercicio 2:

Representa cada una de las siguientes funciones

20. Representa la siguiente función cuadrática: $y = x^2 - 5x + 6$

Solución:

- **Los puntos de corte con el eje x:**
  Se obtienen a partir de la condición y=0. En ese caso:

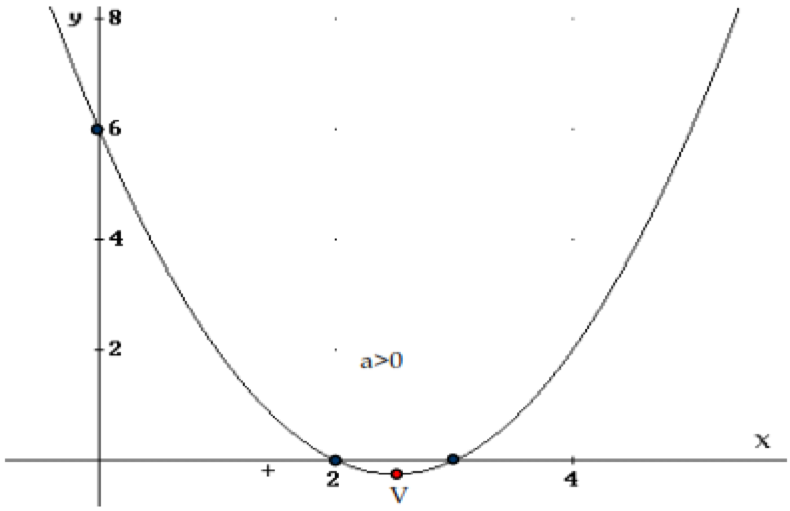
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

- **Las coordenadas del vértice:**

Están dadas por $x = -\dfrac{b}{2a}$; $y = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$. Sustituyendo los valores de a y b en estas expresiones obtenemos:

$x = -\frac{(-5)}{2}$; $y = \frac{-(-5)^2 + 4\cdot 1\cdot 6}{4\cdot 1^2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$; $y = -\frac{1}{4}$, que vamos a expresar como $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

- **Orientación de la parábola:**
  Como a>0, entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- **El punto de corte con el eje y:**
  Está dado por la condición x=0. En nuestro caso, cuando x=0 se tiene que y=6.
- **Representación gráfica:**
  plano cartesiano los puntos que hemos conseguido y unirlos.



Ejercicio 3:

Calcular los puntos de corte de la siguiente parábola con los ejes de coordenadas:

$$y = x^2 - x$$

Solución

Podemos escribir la ecuación en forma factorizada como

$$y = x(x-1)$$

Puntos de corte con el eje de abscisas (eje OX):

Oocurre cuando $y = 0$. Sustituimos en la ecuación y obtenemos

$$0 = x(x-1)$$

Como la ecuación de segundo grado está factorizada no es necesario aplicar la fórmula cuadrática. Las soluciones son $x = 0$ y $x = 1$.

Luego tenemos dos puntos de corte:

$$(0,0),\ \ (1,0)$$

Puntos de corte con el eje de ordenadas (eje OY):

Ocurre cuando $x = 0$. Sustituimos en la ecuación y obtenemos

$$y = 0(0-1) = 0$$

El punto es (0,0).

Notemos que hemos obtenido el punto (0,0) (el origen) como punto de corte con el eje de abscisas y el de ordenadas. Y es que, en efecto, en el origen, la parábola corta a los dos ejes.

Calculamos ahora el vértice y con los puntos de corte y el vértice podemos representar fácilmente la parábola.

Para calcular el vértice, identificamos los coeficientes a, b y c y aplicamos la fórmula:

$$y = x^2 - x \;\rightarrow\; a = 1, \quad b = -1, c = 0$$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, y\right) = \left(-\frac{-1}{2\cdot 1}, y\right) = \left(\frac{1}{2}, y\right)$$

El valor de y lo obtenemos sustituyendo el valor de x en la ecuación:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} =$$

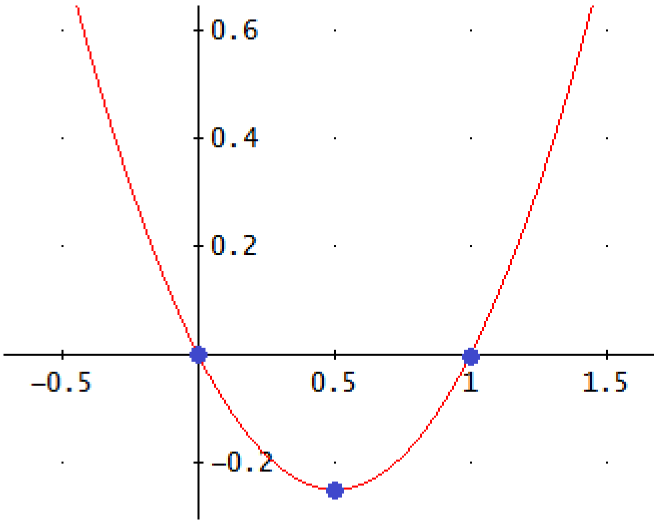
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1-2}{4} =$$

$$= -\frac{1}{4}$$

El **vértice** es

$$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = (0.5, -0.25)$$

La gráfica es



Ejercicio 4:

Representa las funciones cuadráticas.

a. **y** = $-x^2 + 4x - 3$

1. Vértice

$x_v = -4/-2 = 2 \qquad y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -1$ **V(2, 1)**

2. Puntos de corte con el eje OX.

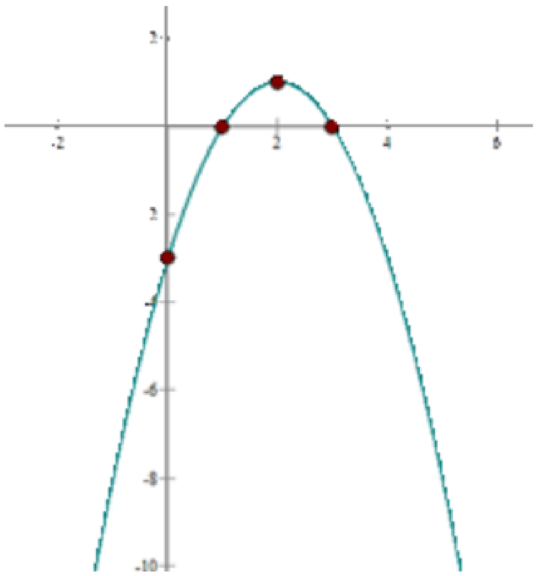
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

(3, 0) **(1, 0)**

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, -3)



Ejercicio 5:

b. Representa gráficamente la función cuadrática:

$y = x^2 + 2x + 1$

1. Vértice

$x_v = -2/2 = -1 \qquad y_v = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$ **V(- 1, 0)**

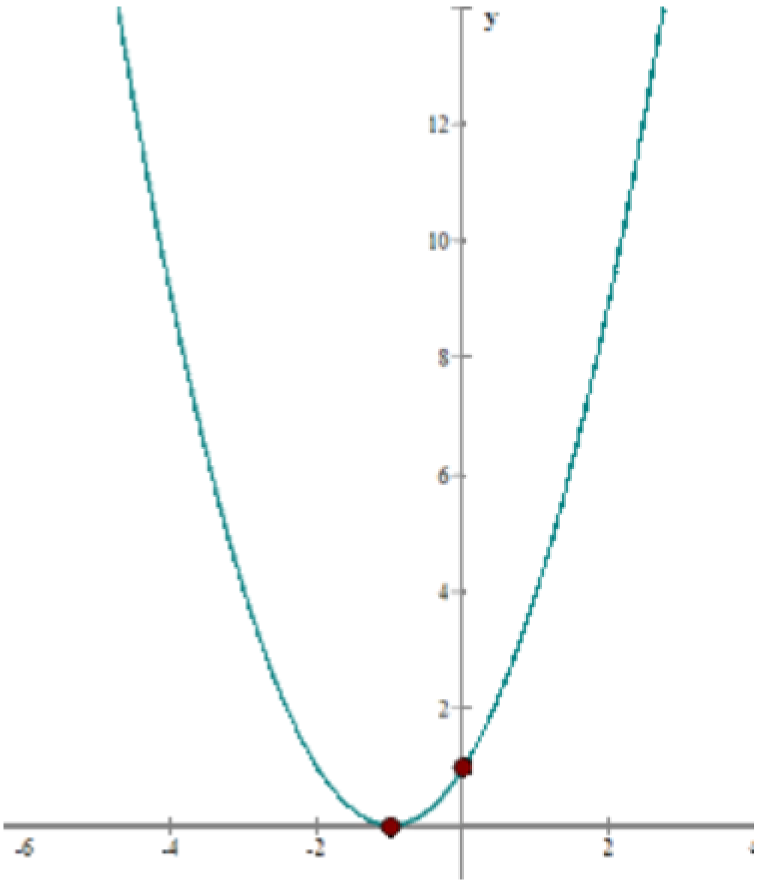
2. Puntos de corte con el eje OX.

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$ Coincide con el vértice: (-1, 0)

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, 1)



C.- Representa gráficamente la función cuadrática:

$y = x^2 + x + 1$

1. Vértice

$x_v = -1/2$ $\quad$ $y_v = (-1/2)^2 + (-1/2) + 1 = 3/4$

V(-1/2, 3/4)

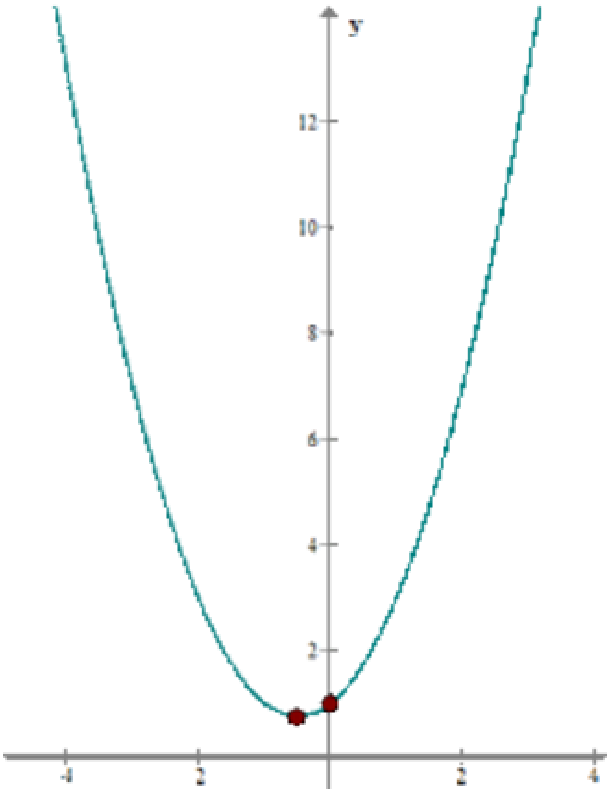
2. Puntos de corte con el eje OX.

$x^2 + x + 1 = 0$

$1^2 - 4 < 0$ $\quad$ No hay puntos de corte con OX.

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, 1)



Ejercicio 6:

Haz la representación gráfica de las siguientes funciones cuadráticas, indicando el vértice y los cortes con los ejes.

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 3x$

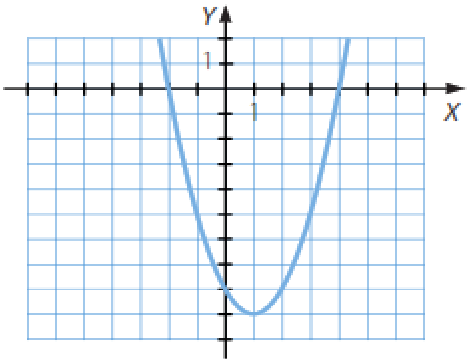
c) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = 2x^2 + 3x - 2$

a) $V(1, -9)$

Puntos de corte con el eje X: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

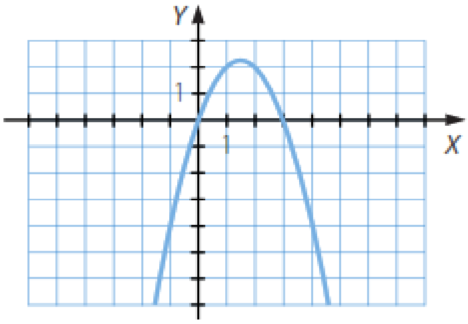
Punto de corte con el eje Y: $(0, -8)$



b) $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Puntos de corte con el eje *X*: (0, 0) y (3, 0)

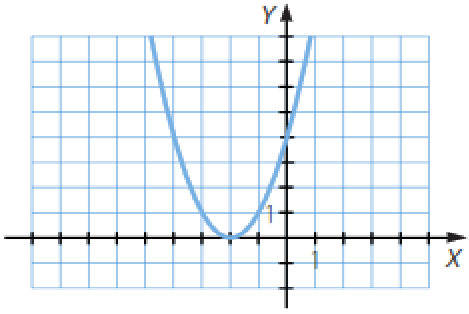
Punto de corte con el eje *Y*: (0, 0)



c) $V(-2, 0)$

Punto de corte con el eje *X*: (−2, 0)

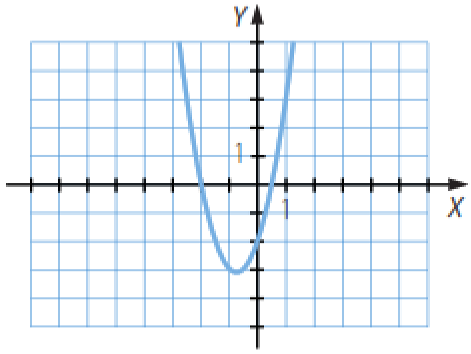
Punto de corte con el eje *Y*: (0, 4)



d) $V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

Puntos de corte con el eje *X*: (−2, 0) y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje *Y*: (0, −2)



Ejercicio 7:

Di cuál es la pendiente de las siguientes rectas observando el coeficiente de la x:

a) $y = x - 4$ **b)** $y = -x$ **c)** $y = -4$

d) $y = \frac{4x - 5}{2}$ **e)** $y = \frac{3 - 2x}{4}$ **f)** $y = \frac{7}{3}$

a) 1 b) −1 c) 0 d) $\frac{4}{2} = 2$ e) $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ f) 0

Ejercicio 8:

Halla la ecuación de las rectas que pasan por los puntos que se indican y represéntalas:

a) (2, 3) y (7, 0)

b) (–2, 5) y por el origen de coordenadas

c) (–3, 2) y (3, 2)

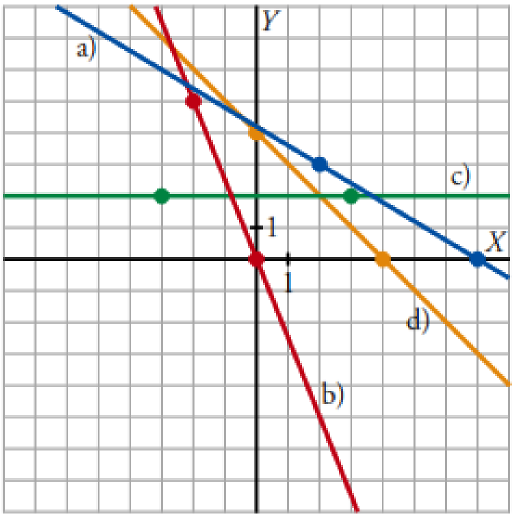
d) (0, 4) y (4, 0)

a) $m = \dfrac{0-3}{7-2} = -\dfrac{3}{5} \rightarrow y = -\dfrac{3}{5}(x-7)$

b) $m = -\dfrac{5}{2} \rightarrow y = -\dfrac{5}{2}x$

c) $m = \dfrac{2-2}{3+3} = 0 \rightarrow y = 2$

d) $m = \dfrac{0-4}{4-0} = -1 \rightarrow y = -x + 4$



Ejercicio 9:

Halla las pendientes de las siguientes rectas, obteniendo dos de sus puntos:

a) $y = 4x - 2$

b) $y = -\dfrac{4}{5}x$

c) $y = \dfrac{5x}{4} + 3$

d) $y = 8 - 5x$

Comprueba, en cada caso, que coinciden con el coeficiente de la x (puesto que la y está despejada).

¿Qué relación existe entre el crecimiento o el decrecimiento de una recta y su pendiente?

a) $(0, -2); (1, 2) \rightarrow m = \dfrac{2+2}{1-0} = 4$

b) $(0, 0); (1, -4/5) \rightarrow m = \dfrac{-4/5}{1} = -\dfrac{4}{5}$

c) $(0, 3); (4, 8) \rightarrow m = \dfrac{8-3}{4} = \dfrac{5}{4}$

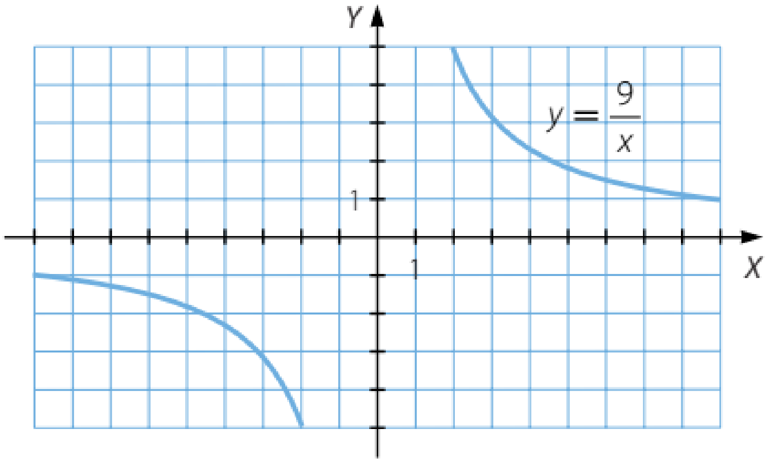
d) $(0, 8); (1, 3) \rightarrow m = \dfrac{3-8}{1-0} = -5$

Si crece, la pendiente es positiva.

Si decrece, la pendiente es negativa.

Ejercicio 10:

Observa la gráfica de la función $y = \dfrac{9}{x}$.



Representa las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{9}{x-3}$

b) $y = \dfrac{9}{x} - 3$

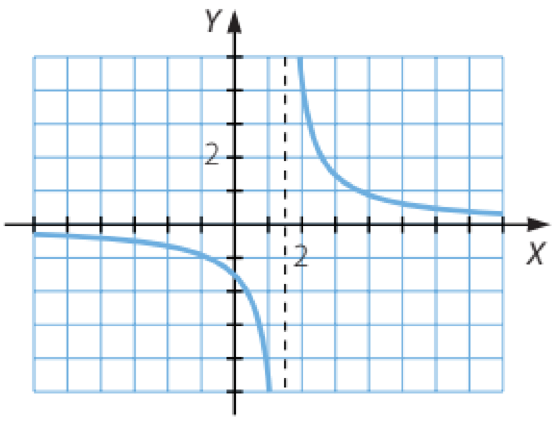
c) $y = -\dfrac{9}{x}$

d) $y = \dfrac{9}{x+2}$

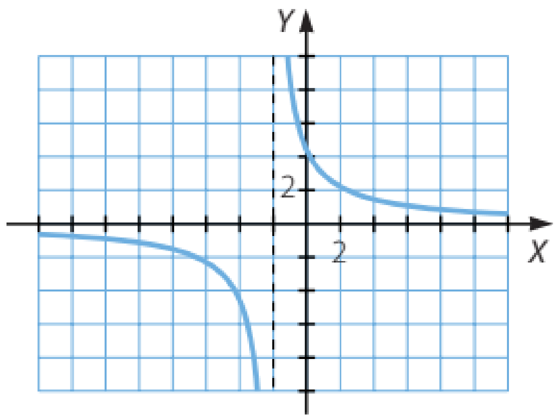
e) $y = \dfrac{9}{x} + 2$

f) $y = -\dfrac{9}{x-1}$

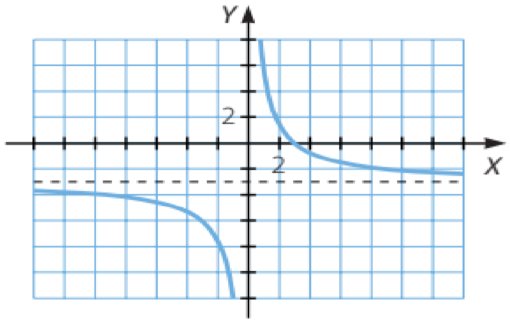
a)



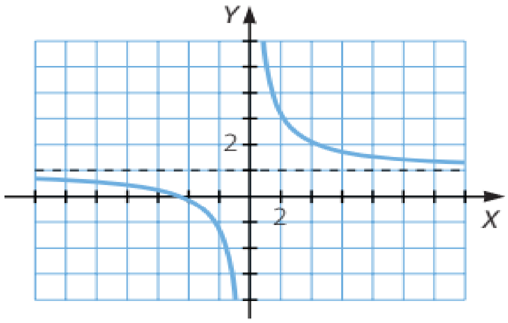
d)



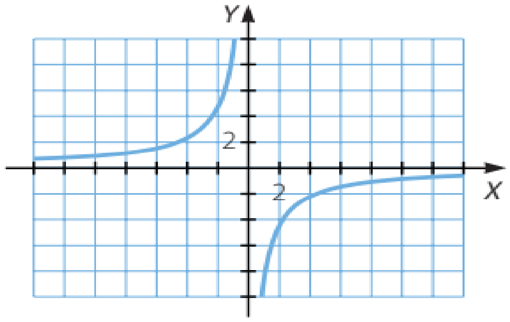
b)



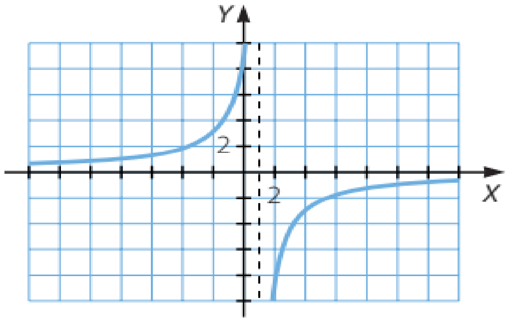
e)



c)

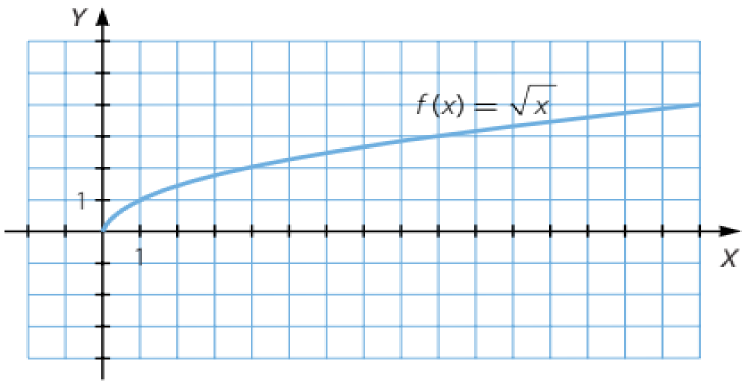


f)



Ejercicio 11:

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es:



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x-2)$

b) $f(x+3)$

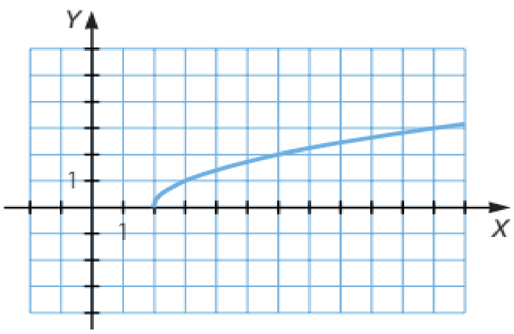
c) $1 + f(x)$

d) $-f(x)$

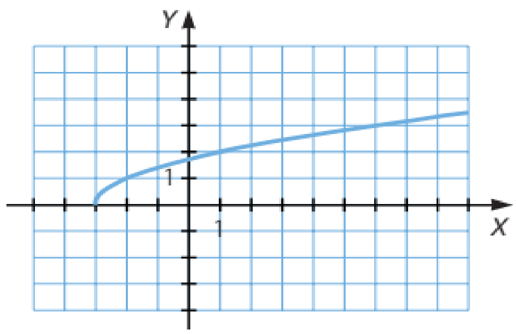
e) $-1 - f(x)$

f) $f(x) - 2$

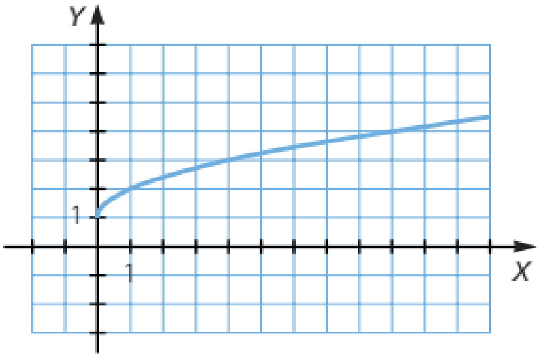
a) $f(x-2) = \sqrt{x-2}$



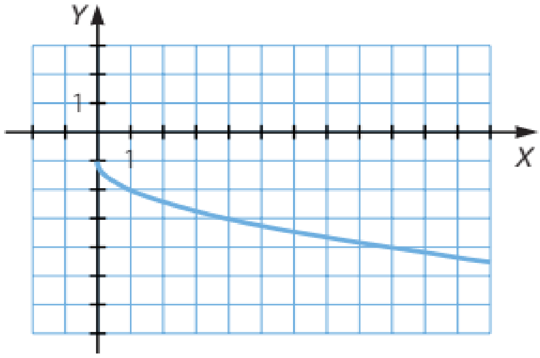
b) $f(x+3) = \sqrt{x+3}$



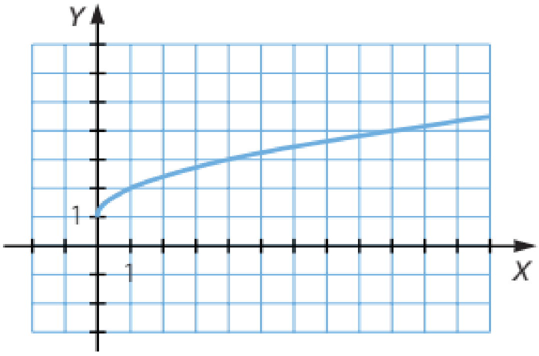
c) $1 + f(x) = 1 + \sqrt{x}$



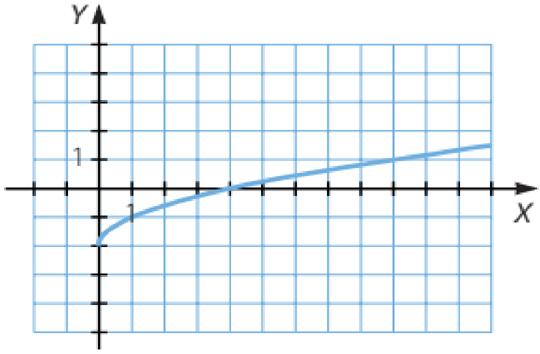
e) $-1 - f(x) = -1 - \sqrt{x}$



d) $-f(x) = -\sqrt{x}$



f) $f(x) - 2 = \sqrt{x} - 2$



<u>Ejercicio 12</u>:

Representa y describe las características de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 2 \\ x-5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ -x+3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

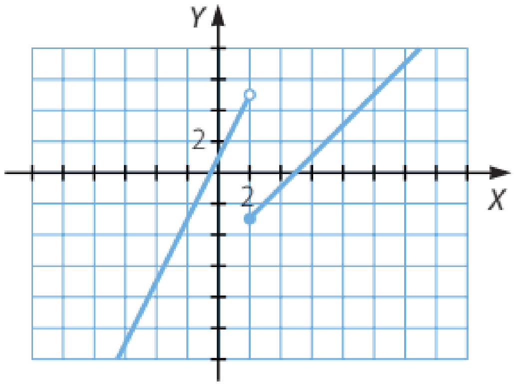
a) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

No es continua en $x = 2$, y este es un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

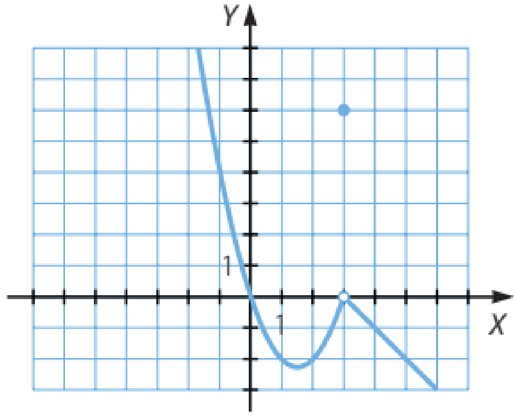
No es simétrica ni periódica.



b) Dom $g = \mathbb{R}$ Im $g = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

La función es creciente en $\left(\frac{3}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

Tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{3}{2}$.



No es continua en $x = 3$, y este es un punto de discontinuidad evitable.

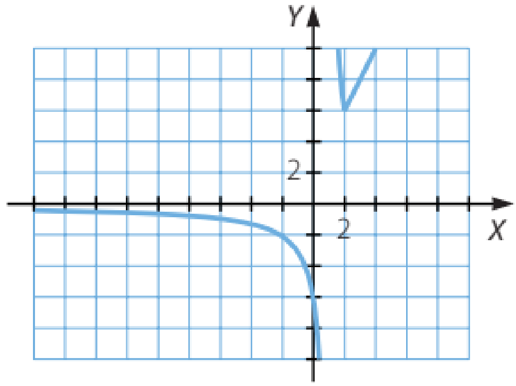
No tiene asíntotas. No es simétrica ni periódica.

c) Dom $h = \mathbb{R} - \{1\}$ Im $h = (-\infty, 0) \cup [6, +\infty)$

La función es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

No es continua en $x = 1$, y este es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.



Tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal en $y = 0$.

No es simétrica ni periódica.

Ejercicio 13:

Escribe como funciones definidas a trozos.

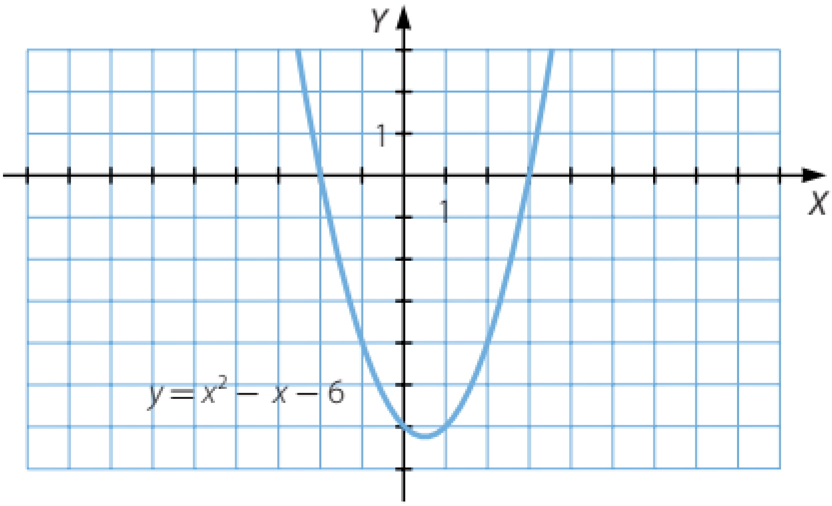
a) $y = |x + 2|$ b) $y = |12 - 3x|$

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$

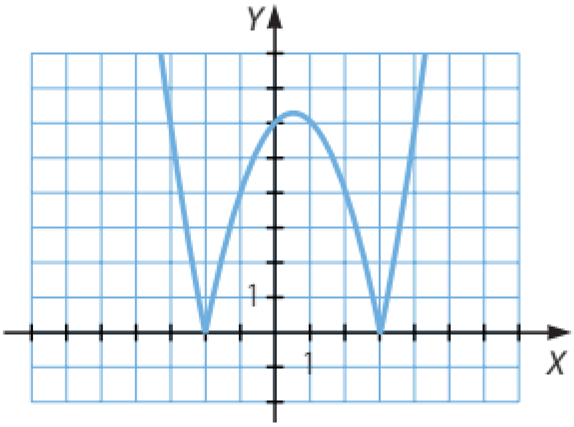
b) $f(x) = \begin{cases} 12 - 3x & \text{si} \quad x \leq 4 \\ -12 + 3x & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

Ejercicio 14:

Observa la gráfica de la función $y = x^2 - x - 6$.



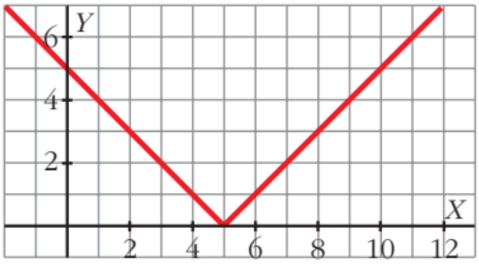
Realiza la gráfica de $y = |x^2 - x - 6|$.



Ejercicio 15:

Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

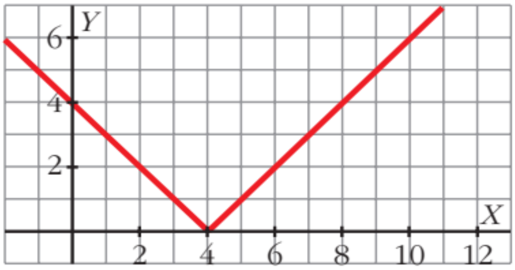


Ejercicio 16:

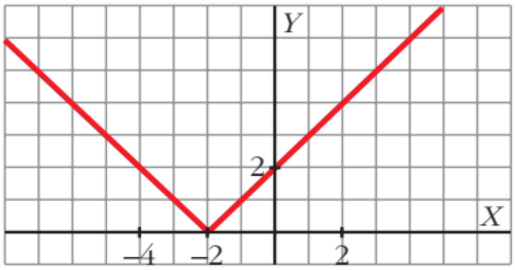
Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos:

a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |x + 2|$ **c)** $y = |x - 3|$ **d)** $y = |-x - 3|$

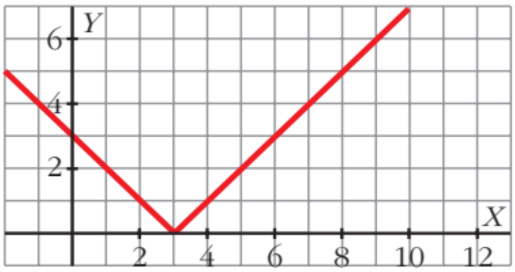
a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



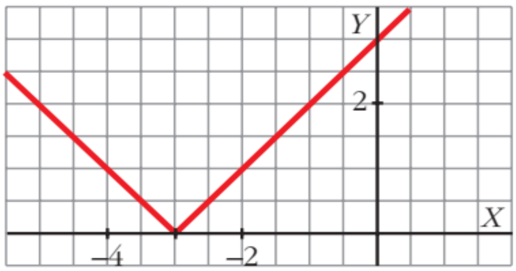
b) $y = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



c) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



d) $y = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \leq -3 \\ x + 3 & \text{si } x > -3 \end{cases}$



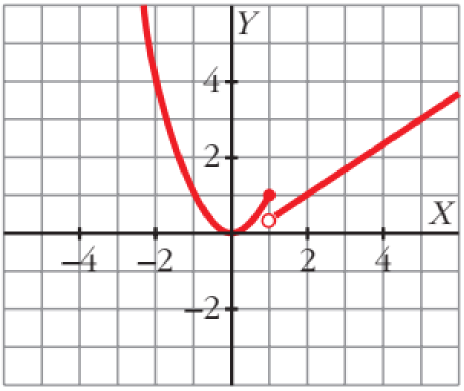
Ejercicio 17:

Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

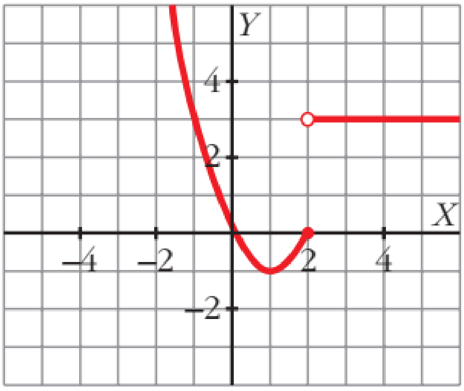
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (2x - 1)/3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ **d)** $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

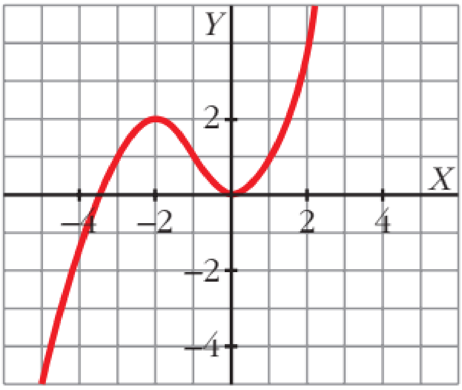
a)



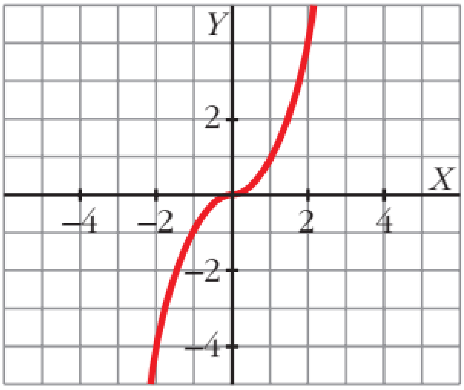
b)



c)



d)



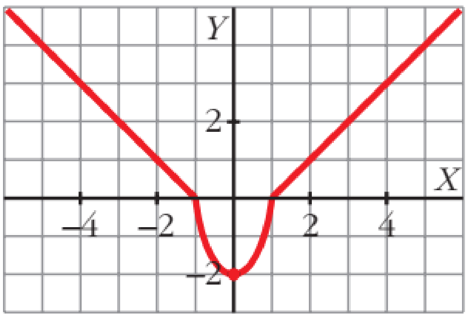
<u>Ejercicio 18</u>:

Representa:

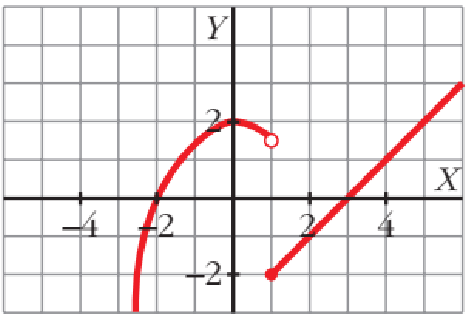
$$\text{a) } y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} -x^2/2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

a)



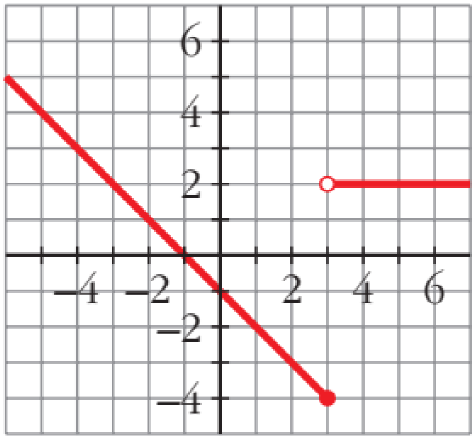
b)



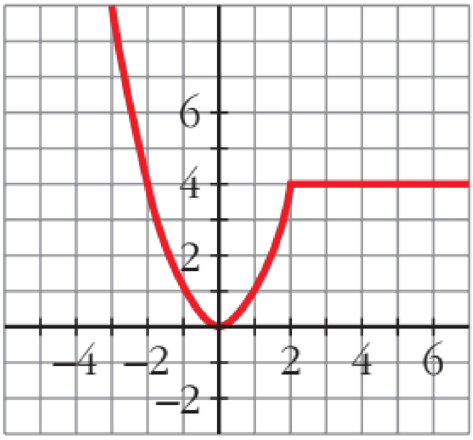
Ejercicio 19:

Busca la expresión analítica de estas funciones:

a)



b)



a) $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$