

HOJA 1 DE EJERCICIOS RESUELTOS
UNIDAD 9: LÍMITES DE FUNCIONES

Ejercicio 1:

Representa las funciones.

$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 1$$

A partir de la gráfica, calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

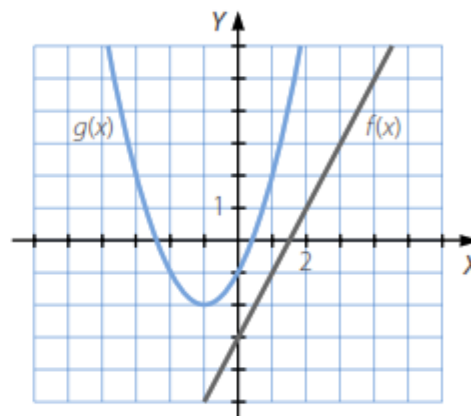
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

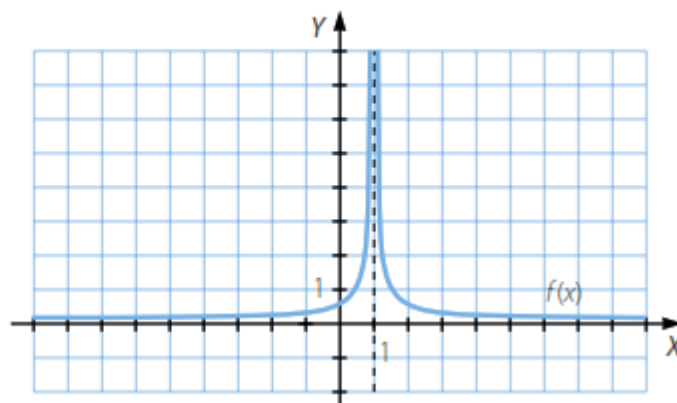
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

**Ejercicio 2:**Observa las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y halla los siguientes límites.

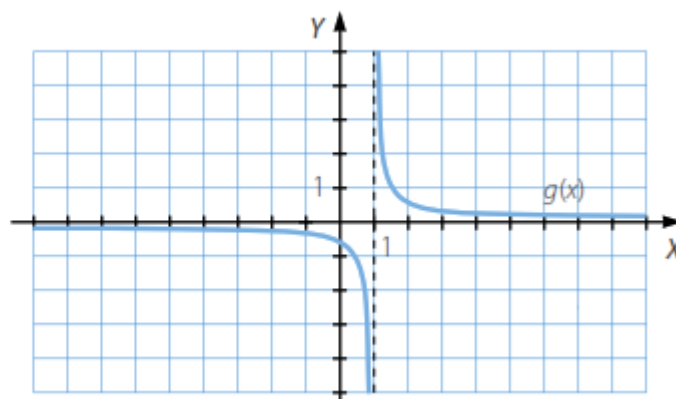
a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$



b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$



a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$

Ejercicio 3:

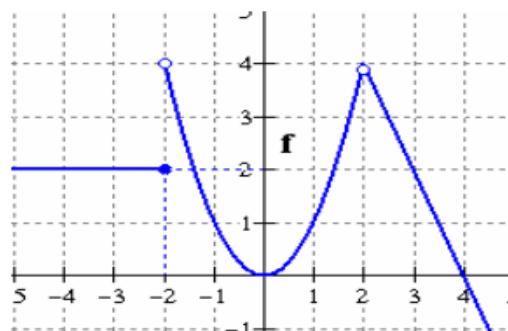
Problema 76. En la gráfica de la función f dada encuentra los siguientes límites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, (c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, (d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, (e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, (f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, (g) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, (h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Solución: (a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2$; (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 4$;
(c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ no existe, porque

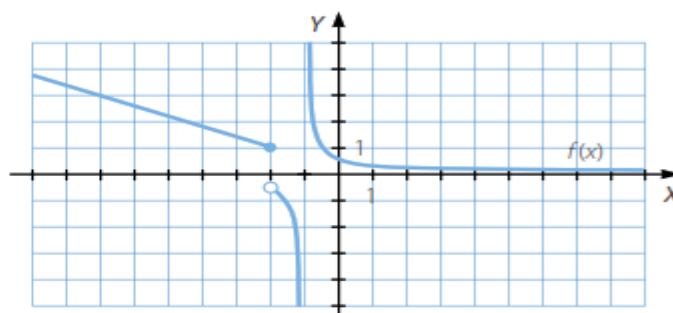
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x); \text{ (d) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0; \text{ (e) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4; \text{ (f) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ porque $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$; (h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$.

**Ejercicio 4:**

Observa la gráfica de la función y determina los límites que se indican.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ no existe.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

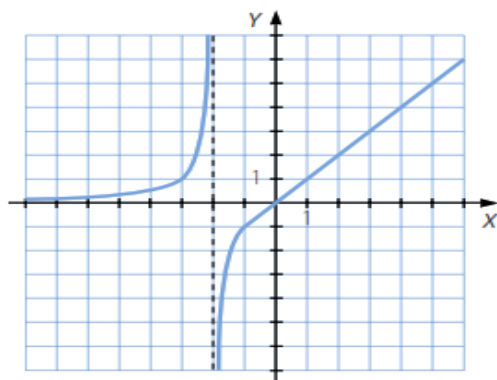
d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ no existe.

Ejercicio 5:

Haz la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

Respuesta abierta.

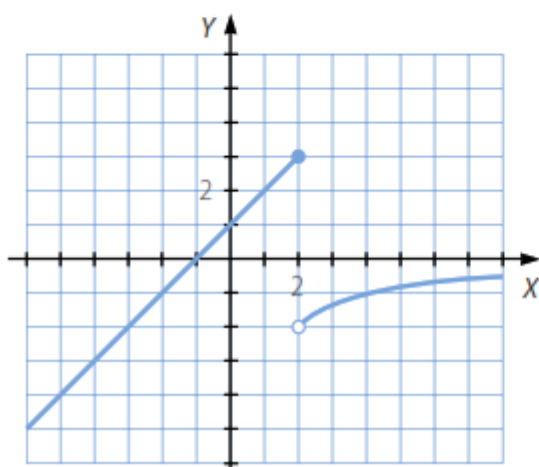


Ejercicio 6:

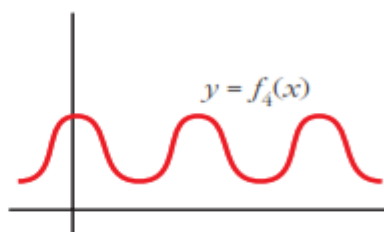
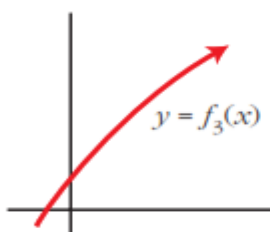
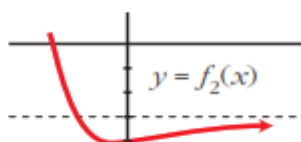
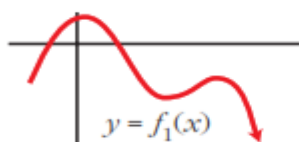
Realiza la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Respuesta abierta.

**Ejercicio 7:**

Di el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$$

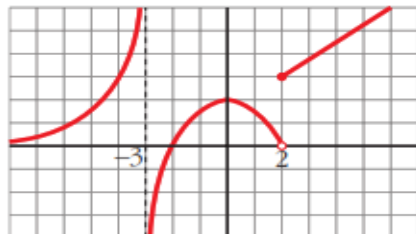
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$

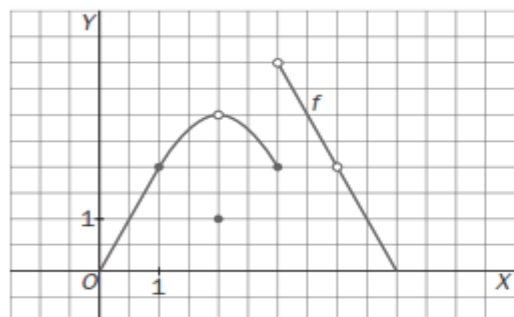
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \text{ no existe.}$$

Ejercicio 8:Sobre la gráfica de la función $f(x)$, halla:

- a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



- a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2 d) 0
 e) 0 f) 3 g) $+\infty$ h) 0

Ejercicio 9:Analiza la siguiente gráfica que representa una función $f(x)$ y calcula:

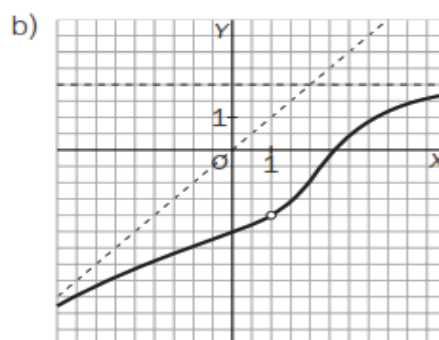
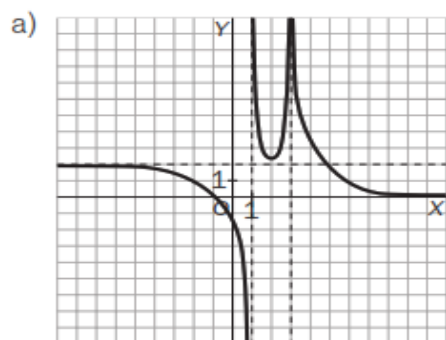
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ f) $f(0)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ g) $f(1)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ h) $f(2)$
 d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ i) $f(3)$
 e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ j) $f(4)$

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ No existe c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ g) $f(1) = 2$ i) $f(3) = 2$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ No existe f) $f(0) = 0$ h) $f(2) = 1$ j) $f(4)$ No existe

Ejercicio 10:

En cada caso, esboza el dibujo de la gráfica de una función que cumpla las condiciones dadas.

- a) • $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ b) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
 • $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ • Si $x > 0$, $f(x) < 2$
 • Asíntota horizontal $y = 2$ en $-\infty$ • Asíntota oblicua $y = x$
 • Asíntota vertical en $x = 1$ • Discontinuidad evitable en $(1, -2)$



Ejercicio 11:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} 3$ Solución: $\lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$	b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} x$ Solución: $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$
c) Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 1}$ Solución: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 1} = \frac{(3)^2 - 9}{3 + 1} = \frac{0}{4} = 0$	d) Encontrar $\lim_{x \rightarrow 3} x^3$. Solución: $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = (\lim_{x \rightarrow 3} x)^3 = (3)^3 = 27$
e) Evaluar $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x + 2)$. Solución: $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x + 2) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$	f) Encontrar $\lim_{x \rightarrow -2} (6x + 1)(2x - 3)$ Solución: $\lim_{x \rightarrow -2} (6x + 1)(2x - 3) = (6(2) + 1)(2(2) - 3) = (13)(1) = 13$.
g) Determinar $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 13}$. Solución: $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 13} = \sqrt{3 + 13} = \sqrt{16} = 4$	h) Evaluar $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2}}{2x - 10}$ Solución: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2}}{2x - 10} = \frac{\sqrt{7 + 2}}{2(7) - 10} = \frac{\sqrt{9}}{14 - 10} = \frac{3}{4}$
i) Encuentre $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x}$ Solución: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{\sqrt{4^2 + 9}}{4} = \frac{5}{4}$	j) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[5]{x^2 - x} + (x^2 + 4)^2$. Solución: $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[5]{x^2 - x} + (x^2 + 4)^2 = \sqrt[5]{(1)^2 - 1} + ((1)^2 + 4)^2 = 0 + 25 = 25$

Ejercicio 12:

Calcula.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x) = -\infty$

Ejercicio 13:

Determina los límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^3 + x^2)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^3 + x^2) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3) = -\infty$

Ejercicio 14:

Determina los límites, y si es preciso, calcula los límites laterales.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{9 - x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x - 2} \rightarrow \frac{10}{0} & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 6}{x - 2} = -\infty & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 6}{x - 2} = +\infty \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{9 - x^2} \rightarrow \frac{3}{0} & \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{9 - x^2} = +\infty & \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{9 - x^2} = -\infty \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} \rightarrow \frac{24}{0} & \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} = +\infty & \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} = -\infty \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} \rightarrow \frac{2}{0} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = +\infty & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = +\infty
 \end{array}$$

Ejercicio 15:

Calcula los límites laterales y el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x - 3} \rightarrow \frac{5}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty$$

Ejercicio 16:

Resuelve los límites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x - 3)(x + 3)}{(x + 1)(x + 3)}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{9}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-5)}{(x-2)(3x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{3x-1} = -\frac{1}{5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(3x^2-1)}{(x+4)(x^2+3x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{47}{6} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x^2-4x-5)}{(x-5)(x^2+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2+2} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-7)}{(x-2)(4x-8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-7}{4x-8} \rightarrow -\frac{3}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x} = 2$$

Ejercicio 17:

Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$$

determina los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{5}{4}$$

Ejercicio 18:

Ejemplo 18:
Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 4}{x^4 + x^3 - 5}$

Vemos que es un límite, cuando $x \rightarrow -\infty$, de un cociente de dos polinomios. En consecuencia aplicamos la regla anterior:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 4}{x^4 + x^3 - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty.$$

Ejercicio 20:

Ejemplo A.4
Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}{\sqrt[3]{x + 1} + 2x}$

De nuevo vemos que se trata de un límite de tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Observamos los términos que aparecen:

- en el numerador aparecen $\sqrt{x^4 + 1}$, cuyo comportamiento cuando $x \rightarrow +\infty$ es como $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$, y x^2 .
- en el denominador aparecen $\sqrt[3]{x + 1}$, cuyo comportamiento es como $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, y $2x$.

Por tanto lo que tiende a infinito más rápidamente es x^2 (es la mayor potencia de x que aparece). Se puede, pues, aplicar la técnica de dividir numerador y denominador por x^2 .

Sin embargo, es más fácil tener en cuenta sólo los términos dominantes, como antes:

- cuando $x \rightarrow +\infty$ el numerador se comporta como $x^2 + x^2 = 2x^2$.
- cuando $x \rightarrow +\infty$ el denominador se comporta como $2x$.

En consecuencia se tiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}{\sqrt[3]{x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Ejercicio 21:

Ejemplo A.5
Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}$

Es de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ así que razonamos como antes.

El numerador, en el límite, se comporta como $\sqrt[4]{x^2} = x^{2/4} = x^{1/2}$, mientras que el denominador se comporta como $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2x^{1/2}$.

En consecuencia, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 22:

Resolver los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}; & \end{array}$$

Ejercicio 23:**Solución**

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\frac{3}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 5 :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 3 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)} = \pm\infty$$

Ejercicio 24:

Calcula los límites laterales en el punto $x = 3$ de:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + 1) = 10$$

Ejercicio 25:

$$\text{Calcular } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

Ejercicio 26:

$$\text{Calcular } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 27:

Evaluar $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)} = \frac{1}{3}.$

Ejercicio 28:

Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6},$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x+2)} = \frac{6}{5}$

Ejercicio 29:

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x^2+2x+3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 30:

Hallar el $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2-(2)^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$

Ejercicio 31:

Calcular el $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+4}}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x+4})} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+4})^2} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{x+4} = \sqrt{-4+4} = 0$$

Ejercicio 32:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 + 3x^3 + 2}{7x^6 + x - 1}$$

Solución

Como el grado del numerador es el mismo que el del denominador, el límite es el cociente de los coeficientes principales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 + 3x^3 + 2}{7x^6 + x - 1} = \frac{3}{7}$$

Ejercicio 33:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x(x^2 + 1)}$$

Solución

Tenemos un cociente de polinomios:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x^3 + x}$$

El grado del numerador es menor que el del denominador, así que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x^3 + x} = 0$$

Ejercicio 34:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{2x^4 + 3x - 11}}{\sqrt[7]{x^3 + 2}}$$

Solución

Como los monomios que importan son los de grado mayor, podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{2x^4 + 3x - 11}}{\sqrt[7]{x^3 + 2}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{2x^4}}{\sqrt[7]{x^3}} \end{aligned}$$

Escribiendo las raíces como potencias,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{2x^4}}{\sqrt[7]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{2} \cdot x^{4/5}}{\sqrt[7]{1} \cdot x^{3/7}}$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite es infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{2x^4 + 3x - 11}}{\sqrt[7]{x^3 + 2}} = +\infty$$

Ejercicio 35:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 - x^2)$$

Solución

Observad que x tiende a infinito negativo.

Como prima el exponente mayor, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 - x^2) &= \\ &= -5 \cdot (-\infty)^3 = \\ &= -5 \cdot (-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Observad que el cubo mantiene el signo negativo del infinito, pero el coeficiente negativo cambia el signo del infinito al multiplicarlo.

Ejercicio 36:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 8x - 3x^6)$$

Solución

Observad que x tiende a infinito negativo.

Como prima el exponente mayor,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 8x - 3x^6) &= \\ &= -3 \cdot (-\infty)^6 = \\ &= -3 \cdot (+\infty) = -\infty\end{aligned}$$

Observad que la potencia x^6 hace que el infinito sea positivo (porque 6 es par), pero el coeficiente -3 cambia su signo.

Ejercicio 37:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 - 2x + 5}}{x - 1}$$

Solución

Tenemos un cociente de infinitos.

El grado en el denominador es 1. En el numerador también, porque tenemos un cubo dentro de una raíz cúbica. Por tanto, el límite es el cociente de los coeficientes principales:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 - 2x + 5}}{x - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{27} \cdot x^{\frac{3}{3}}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x - 1} = 3\end{aligned}$$

Ejercicio 38:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \sqrt{x^2 - 1}}{5 - \sqrt{1 + x^2}}$$

Solución

Tenemos infinito partido infinito.

El límite depende de los sumandos x^2 , así que podemos omitir los otros:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \sqrt{x^2 - 1}}{5 - \sqrt{1 + x^2}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{-\sqrt{x^2}} = 1\end{aligned}$$

Ejercicio 39:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 1}}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$$

Solución

Observad que x tiende a -1.

El límite es fácil de calcular ya que sólo tenemos que sustituir x por -1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 1}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} &= \\ &= \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1 \end{aligned}$$