UNIDAD 10: **DERIVADAS**

CONTENIDO

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. DERIVADAS LATERALES 2
2. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS 2
3. DERIVADAS DE LAS OPERACIONES CON FUNCIONES 3
4. FUNCIONES DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES Y COMPUESTAS. TABLA........ 3

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. DERIVADAS LATERALES

Definición: Se llama **derivada** de una función $y = f(x)$ en un punto de abscisa x_0 al siguiente límite si existe:

$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Se suele representar por $f'(x_0) = D[f(x_0)] = y'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ y todas significan lo mismo.

También se puede usar otro límite equivalente si a uno le gusta más y es:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ejemplo: Dada la función $y = x^2 - x$, calcular la derivada en el punto de abscisa $x_0 = 3$

Aplicamos la definición usando el primer límite (practicad usando el otro y ver que sale lo mismo)

$$y'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{y(3+h) - y(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(3+h)^2 - (3+h)\right] - \left[3^2 - 3\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[9 + 6h + h^2 - (3+h)\right] - 6}{h} =$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{6 + 5h + h^2 - 6}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{5h + h^2}{h} =$ (ahora nos sale una indeterminación $\frac{0}{0}$, que la resolvemos sacando factor común)

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot(5+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(5+h) = 5$. Así la derivada de la función $y = x^2 - x$ en $x_0 = 3$ vale 5

Definición: La **derivada lateral por la derecha** de una función $y = f(x)$ en un punto de abscisa x_0 al siguiente límite si existe:

$$f'(x_0^+) = D\left[f(x_0^+)\right] = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definición: La **derivada lateral por la izquierda** de una función $y = f(x)$ en un punto de abscisa x_0 al siguiente límite si existe:

$$f'(x_0^-) = D\left[f(x_0^-)\right] = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Consecuencia: Una función $y = f(x)$ tiene derivada en un punto de abscisa x_0 si y solo si existen las derivadas laterales y coinciden. Es decir,

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'(x_0^+) \text{ y } \exists f'(x_0^-) \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-) \end{cases}$$

Nota: las derivadas laterales se usarán sobre todo en las funciones definidas por partes o a trozos, de manera similar a como se hacía en el estudio de la continuidad

2. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

Definición: Se llama función derivada (o sólo derivada) de una función $y = f(x)$ y se representa por $y' = f'(x)$, a la función que asocia a cada x el valor de su derivada.

Ejemplo: Calcular la función derivada de $f(x) = 3x^2 + x$

Tomamos un punto cualquiera x_0 y le aplicamos la definición de derivada:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x_0+h)^2+(x_0+h)\right]-\left[3{x_0}^2+x_0\right]}{h}=$$ (desarrollamos y operamos) =

$$\lim_{h\to 0}\frac{6x_0h+3h^2+h}{h}=$$ (sacamos factor común y simplificamos) = $$\lim_{h\to 0}\frac{h(6x_0+3h+1)}{h}=6x_0+1$$

Lo que hemos obtenido es que para cualquier x_0 tenemos que $f'(x_0)=6x_0+1$, Si en lugar de x_0 hubiésemos puesto x, nos da la función derivada o derivada $f'(x)=6x+1$. Esta función ya nos permite calcula la derivada en otro punto simplemente sustituyendo y sin tener que hacer límites. Por ejemplo, ¿cuál sería la derivada en $x_0=-4$? Pues fácilmente, $f'(-4)=6\cdot(-4)+1=-23$

__Definición__: Derivadas sucesivas son derivadas de funciones derivadas y son

Derivada primera de f: es la que hemos tratado $y'=f'(x)$

Derivada segunda de f: es la derivada de la derivada $y''=f''(x)=(f')'(x)$

Derivada tercera de f: es la derivada de la derivada segunda: $y'''=f'''(x)=(f'')'(x)$

Y así sucesivamente, y diremos

Derivada n-ésima de f: $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x)$

3. DERIVADAS DE LAS OPERACIONES CON FUNCIONES

Son una serie de fórmulas que hay que saberse de memoria. Si alguien está interesado en conocer su demostración lo puede consultar en cualquier libro de texto.

Derivada de la suma o diferencia de funciones	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
Derivada del producto de un nº real por una función	$(k\cdot f)'=k\cdot f'$
Derivada del producto de dos funciones	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
Derivada del cociente de dos funciones	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena	$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$

Ya se verán su utilidad más adelante.

4. FUNCIONES DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES Y COMPUESTAS. TABLA

Vamos a dar unas tablas, que habrá que conocer de memoria también, donde vienen las derivadas de las funciones elementales y compuestas, así como un ejemplo de cada una

FUNCIONES BÁSICAS		DERIVADA
Constante	$f(x)=c$	$f'(x)=0$
Identidad	$f(x)=x$	$f'(x)=1$
Potencial canónica	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$
Racional básica	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
Irracional básica	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FUNCIÓN SIMPLE	DERIVADA FUNCIÓN SIMPLE	FUNCIÓN COMPUESTA	DERIVADA FUNCIÓN COMPUESTA
$y=x^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=f(x)^n$	$y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\dfrac{1}{x^n}$ ó $y=x^{-n}$	$y'=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$ ó $y'=-n\cdot x^{-n-1}$	$y=\dfrac{1}{f(x)^n}$ ó $y=f(x)^{-n}$	$y'=\dfrac{-n}{f(x)^{n+1}}\cdot f'(x)$ ó $y'=-n\cdot f(x)^{-n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt[n]{x}$ ó $y=x^{\frac{1}{n}}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ó $y=\dfrac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$	$y=\sqrt[n]{f(x)}$ ó $y=f(x)^{\frac{1}{n}}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}\cdot f'(x)$ ó $y=\dfrac{1}{n}\cdot f(x)^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x)$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y=a^{f(x)}$	$y'=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{1}{f(x)\cdot\ln a}\cdot f'(x)$

<u>*Ejemplo*</u>: Derivamos las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DERIVADA
$y=x^7$	$y'=7\cdot x^{7-1}\Rightarrow y'=7\cdot x^6$
$f(x)=-4x^5+7x^2+9x-78$	$f'(x)=-4\cdot5x^{5-1}+7\cdot2x^{2-1}+9\cdot1+0\Rightarrow f'(x)=-20x^4+14x+9$
$f(x)=\dfrac{1}{x^5}$	$f(x)=x^{-5}\Rightarrow f'(x)=(-5)\cdot x^{-5-1}\Rightarrow f'(x)=-5\cdot x^{-6}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-5}{x^6}$
$y=(2x^2-5)^4$	$y'=4\cdot(2x^2-5)^{4-1}\cdot(2x^2-5)'\Rightarrow y'=4\cdot(2x^2-5)^3\cdot4x\Rightarrow y'=16\cdot(2x^2-5)^3\cdot x$
$f(x)=\dfrac{1}{(3x-1)^2}$	$f'(x)=\dfrac{-2}{(3x-1)^{2+1}}\cdot(3x-1)'\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2}{(3x-1)^3}\cdot3\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-6}{(3x-1)^3}$ O bien, de otra forma: $f(x)=(3x-1)^{-2}\Rightarrow f'(x)=-2\cdot(3x-1)^{-3}\cdot(3x-1)'\Rightarrow$ $f'(x)=\dfrac{-2}{(3x-1)^3}\cdot3\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-6}{(3x-1)^3}$
$y=\sqrt{8x^3}$	$y'=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{8x^3}}\cdot(8x^3)'\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{8x^3}}\cdot24\cdot x^2\Rightarrow y'=\dfrac{12\cdot x^2}{\sqrt{8x^3}}\Rightarrow$ $y'=\dfrac{12\cdot x^2}{2\cdot x\cdot\sqrt{2x}}\Rightarrow y'=\dfrac{6\cdot x}{\sqrt{2x}}$
$y=\sqrt[5]{x}$	$y'=\dfrac{1}{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}$
$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow y=x^{\frac{-2}{3}}$	$y'=\dfrac{-2}{3}x^{\frac{-2}{3}-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}}\Rightarrow y'=\dfrac{-2}{3\cdot x^{\frac{5}{3}}}\Rightarrow y'=\dfrac{-2}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}$
$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+7}$	$f'(x)=\dfrac{(2x+1)'\cdot(x+7)-(2x+1)\cdot(x+7)'}{(x+7)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2\cdot(x+7)-(2x+1)\cdot1}{(x+7)^2}\Rightarrow$ $f'(x)=\dfrac{2x+14-2x-1}{(x+7)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{13}{(x+7)^2}$

$f(x)=\dfrac{-x+3}{x^2-5}$	$f'(x)=\dfrac{(-1)\cdot(x^2-5)-(-x+3)\cdot 2x}{(x^2-5)^2}=\dfrac{-x^2+5+2x^2-6x}{(x^2-5)^2}\Rightarrow$ $f'(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{(x^2-5)^2}$
$y=(2x^2+3x-1)\cdot(-3x+2)$	$y'=(4x+3)\cdot(-3x+2)+(2x^2+3x-1)\cdot(-3)=-12x^2+8x-9x+6-6x^2-9x+3\Rightarrow$ $y'=-18x^2-10x+9$
$f(x)=e^{\sqrt{x}}$	$f´(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow f´(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\cdot\sqrt{x}}$
$f(x)=5^x$	$f´(x)=5^x\cdot\ln 5$
$f(x)=L(\sqrt{x})$	$f´(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)´\Rightarrow f´(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow f´(x)=\dfrac{1}{2x}$
$y=\log_3\left(x^2+1\right)$	$y´=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot\ln 3}\cdot\left(x^2+1\right)´\Rightarrow y´=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\ln 3}\cdot 2x\Rightarrow y´=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\cdot\ln 3}$
$f(x)=(x+2)e^{x^2+x}$	$f'(x)=(x+2)'e^{x^2+x}+(x+2)\left(e^{x^2+x}\right)'\Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{x^2+x}+(x+2)\cdot e^{x^2+x}\cdot(2x+1)\Rightarrow$ $f'(x)=e^{x^2+x}+(2x^2+x+4x+2)\cdot e^{x^2+x}\Rightarrow f'(x)=e^{x^2+x}\cdot(1+2x^2+5x+2)\Rightarrow$ $f'(x)=e^{x^2+x}\cdot(2x^2+5x+3)$
$y=\sqrt{x}\ln\left(1-x^2\right)$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(1-x^2)+\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)\Rightarrow y'=\dfrac{\ln(1-x^2)}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2x\sqrt{x}}{1-x^2}$

__Ejemplos__: Ejercicios resueltos de derivadas:

FUNCIÓN	SOLUCIÓN
$f(x)=x^6$	$f´(x)=6x^{6-1}=\boxed{6x^5}$
$f(x)=x^{\frac{5}{2}}$	$f´(x)=\dfrac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}=\dfrac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}}=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{5\sqrt{x^3}}{2}=\boxed{\dfrac{5x\sqrt{x}}{2}}$
$f(x)=x^{-7}$	$f´(x)=-7x^{-7-1}=-7x^{-8}=\boxed{\dfrac{-7}{x^8}}$

$f(x)=x^{\frac{-4}{7}}$	$f'(x)=\frac{-4}{7}x^{\frac{-4}{7}-1}=\frac{-4}{7}x^{\frac{-4}{7}-\frac{7}{7}}=\frac{-4}{7}x^{\frac{-11}{7}}=\frac{-4}{7x^{\frac{11}{7}}}=\frac{-4}{7\sqrt[7]{x^{11}}}=\boxed{\frac{-4}{7x\sqrt[7]{x^4}}}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1x^{1-1}=1x^0=\boxed{1}$
$f(x)=\frac{1}{x^3}$	$f'(x)=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=\boxed{\frac{-3}{x^4}}$
$f(x)=\sqrt[5]{x^4}$	$f(x)=\sqrt[5]{x^4}=x^{\frac{4}{5}}$ $f'(x)=\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}=\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-\frac{5}{5}}=\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5x^{\frac{1}{5}}}=\boxed{\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}}$

__Ejemplos__: Ejercicios resueltos de derivadas:

FUNCIÓN	SOLUCIÓN
$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{3}}}=x^{-\frac{7}{3}}$	$f'(x)=-\frac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-1}=-\frac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-\frac{3}{3}}=-\frac{7}{3}x^{-\frac{10}{3}}=\frac{-7}{3x^{\frac{10}{3}}}=\frac{-7}{3\sqrt[3]{x^{10}}}=\boxed{\frac{-7}{3x^3\sqrt[3]{x}}}$
$f(x)=9^x$	$f'(x)=\boxed{9^x\ln 9}$
$f(x)=0.25^x$	$f'(x)=0.25^x\ln(0.25)$
$f(x)=-5x$	$f'(x)=\boxed{-5}$
$f(x)=\sqrt{2}x$	$f'(x)=\boxed{\sqrt{2}}$
$f(x)=3x^{-6}$	$f'(x)=3(-6)x^{-7}=-18x^{-7}=\boxed{\frac{-18}{x^7}}$
$f(x)=\frac{4}{x}$	$f'(x)=\boxed{\frac{-4}{x^2}}$
$f(x)=3\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\frac{5}{\sqrt[6]{x}}$	$f'(x)=\frac{-5}{6\sqrt[6]{x^7}}$

$f(x)=x^3+x^2+x+5$	$f'(x)=\boxed{3x^2+2x+1}$
$f(x)=\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{4}x^2+5x-3$	$f'(x)=\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{2}x+5$
$f(x)=x^{-3}+x^2+x^{-1}+7$	$f'(x)=-3x^{-4}+2x-x^{-2}$
$f(x)=(3x^2+3)(2x^2+1)$	$f'(x)=6x(2x^2+1)+(3x^2+3)4x=12x^3+6x+12x^3+12x=24x^3+18x=\boxed{6x(4x^2+3)}$
$f(x)=(4x^3-6)(4x^2+4)$	$f'(x)=12x^2\left(4x^2+4\right)+\left(4x^3-6\right)8x=48x^4+48x^2+32x^4-48x=$ $=80x^4+48x^2-48x=\boxed{16x(5x^3+3x-3)}$
$f(x)=(x+5x^2+6x^3)(4x^2-5)$	$f'(x)=120x^4+80x^3-78x^2-50x-5$
$f(x)=\dfrac{2x^3+5}{4x^2+7}$	$f'(x)=\dfrac{6x^2(4x^2+7)-(2x^3+5)8x}{(4x^2+7)^2}=\dfrac{24x^4+42x^2-16x^4-40x}{(4x^2+7)^2}=\dfrac{8x^4+42x^2-40x}{(4x^2+7)^2}=\dfrac{2x(4x^3+21x-20)}{(4x^2+7)^2}$
$f(x)=\dfrac{x^{-2}+x^4-6}{3x^3+4x^4}$	$f'(x)=\dfrac{3x^7+96x^4+54x^3-28x-18}{x^7(4x+3)^2}$
$f(x)=\frac{3}{5}\ln(x)$	$f(x)=\boxed{\dfrac{3}{5x}}$
$f(x)=\ln\left(\dfrac{3x}{4}\right)$	$f'(x)=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3x}{4}}=\boxed{\dfrac{1}{x}}$
$f(x)=4\ln(5x)$	$f'(x)=4\dfrac{5}{5x}=\boxed{\dfrac{4}{x}}$
$f(x)=Ln(3x^3+x^{-4}+e^x+1)$	$f'(x)=\boxed{\dfrac{9x^2-4x^{-5}+e^x}{3x^3+x^{-4}+e^x+1}}$

Ejemplos: Ejercicios resueltos de derivadas:

FUNCIÓN	SOLUCIÓN
$f(x)=(x+4)\ln(3x+5)$	$f'(x)=1\cdot\ln(3x+5)+(x+4)\dfrac{3}{3x+5}=\boxed{\ln(3x+5)+\dfrac{3(x+4)}{3x+5}}$
$f(x)=e^{2x}$	$f'(x)=\boxed{2e^{2x}}$

$f(x)=3e^{4x}$	$f'(x)=3\cdot 4e^{4x}=\boxed{12e^{4x}}$
$f(x)=\left(x^2+1\right)^7$	$f'(x)=7(x^2+1)^6.2x=14x\left(x^2-1\right)$
$f(x)=\left(x^2+1\right)^{-1/3}$	$f'(x)=\frac{-1}{3}(x^2+1)^{\frac{-4}{3}}.2x=-\frac{2}{3}x\left(x^2-1\right)^{\frac{-4}{3}}$
$f(x)=x^2e^{x^5}$	$f'(x)=e^{x^5}(5x^6+2x)$
$\mathbf{f(x)=\frac{1}{7x+1}}$	$f'(x)=\frac{0\cdot(7x+1)-1\cdot 7}{(7x+1)^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{7}{(7x+1)^2}$
$y=\frac{x}{(x+3)^2}$	$) \; y'=\frac{(x+3)^2-2(x+3)x}{(x+3)^4}=\frac{(x+3)-2x}{(x+3)^3}=\frac{3-x}{(x+3)^3}$
$y=\frac{16}{x^2(x-4)}$	$y'=\frac{-16(3x^2-8x)}{(x^3-4x^2)^2}$
$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$	$y'=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$ $=\frac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x^2}+\cancel{2x}-\cancel{x^2}-\cancel{x}-1-\cancel{2x^3}-\cancel{x^2}+\cancel{2x^2}+\cancel{x}-\cancel{2x}-1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$
$y=e^x(x-1)$	$y'=e^x(x-1)+e^x=e^x(x-1+1)=xe^x$
$y=x^2e^x$	$y'=2x\,e^x+x^2e^x=e^x(2x+x^2)$