UNIDAD 1: NÚMEROS REALES

Contenido

1. NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS 2
2. NÚMEROS RACIONALES. NÚMEROS DECIMALES. POTENCIAS 2
3. NÚMEROS IRRACIONALES. NÚMEROS REALES 5
4. INTERVALOS EN LA RECTA REAL 6
5. APROXIMACIONES DECIMALES. REDONDEOS Y TRUNCAMIENTOS 8
6. ERRORES 9
7. NOTACIÓN CIÉNTIFICA 9
8. RADICALES 11
9. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES 12
10. LOGARITMO DE UN NÚMERO. LOGARITMO DECIMAL Y LOGARITMO NEPERIANO 13
11. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS 15

1. NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS

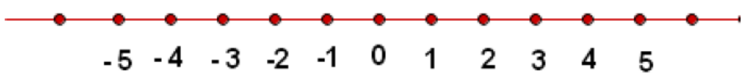
Con los **números naturales** contamos los elementos de un conjunto (**número cardinal**). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**ordinal**). Se representa por $\mathbb{N}$ y sus elementos son.

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$$

El conjunto de los números enteros son los naturales y sus correspondientes negativos. Se representa por $\mathbb{Z}$ y sus elementos son:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots\}$$

Gráficamente se representan en una recta horizontal,



Un nº entero a es menor que otro nº entero b cuando ($b-a$) es positivo, o bien gráficamente cuando a está a la izquierda de b. Se nota por $a<b$ y gráficamente es,

Un nº entero a es mayor que otro nº entero b cuando ($b-a$) es negativo, o bien gráficamente cuando a está a la derecha de b. Se nota por $a>b$ y gráficamente es,

Un concepto asociado a los números enteros es el de valor absoluto, que de manera burda consiste en convertir al nº en positivo si fuera negativo, y si es positivo dejarlo tal cual.

La definición correcta es la siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

<u>Ejemplos</u>:

|-4| = -(-4) = 4 |9| = 9 |0| = 0

2. NÚMEROS RACIONALES. NÚMEROS DECIMALES. POTENCIAS

Se llama número **racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero. Matemáticamente se expresa como sigue:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \ / \ \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}\ ; \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}; \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \right\}$$

Son números racionales, por ejemplo, $\frac{3}{5}, -6, \frac{5}{4}, 0, \frac{-17}{24}$.....

Si efectuamos dicha división, nos puede salir exacta o con decimales como, por ejemplo:

$\frac{20}{4}=5$ ó $\frac{3}{2}=1,5$ ó $\frac{7}{3}=2,3333.....$ ó $\frac{111}{90}=1,233333...$

Al realizar la división de una fracción $\frac{a}{b}$ los tipos de números decimales que nos pueden salir son de los siguientes tipos:

- Exactos: son los números enteros como 4, 7, -12 … por ejemplo, $\frac{20}{4}=5$
- Decimales exactos: son aquellos que tienen un número finito de cifras decimales como por ejemplo 1,7, -2,25, 3,237, …. Por ejemplo, $\frac{3}{2}=1,5$
- Decimales periódicos puros: son aquellos en que sus cifras decimales se repiten de forma indefinida como por ejemplo 0,66666…= $0,\overset{\frown}{6}$, 9,232323….= $9,\overset{\frown}{23}$, 7,1011010101….= $7,1\overset{\frown}{01}$. Por ejemplo, $\frac{7}{3}=2,3333.....=2,\overset{\frown}{3}$
- Decimales periódicos mixtos: son aquellos que tienen al principio una parte que no se repite y después otra que se repite indefinidamente como por ejemplo 4,933333…= $4,9\overset{\frown}{3}$, -5,2477777….= $-5,24\overset{\frown}{7}$, 78,41212121212…..= $78,4\overset{\frown}{12}$. Por ejemplo, $\frac{111}{90}=1,233333...=1,2\overset{\frown}{3}$

Pasar de fracción a decimal como hemos visto consiste sólo en realizar la división. Ahora nos planteamos el problema inverso, nos dan el número decimal y tenemos que obtener la fracción. Dependiendo de cada caso se hace de una forma u otra, a este proceso se le llama obtención de la **fracción generatriz**.

Veamos los diferentes casos:

- Si el decimal es exacto:

Numerador: el número decimal sin coma.

Denominador: la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el número.

Ejemplos:

$3,25=\frac{325}{100}=\frac{65}{20}$ (hemos simplificado) $0,008=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}$ (hemos simplificado)

- Si el decimal es periódico puro:

Numerador: al número decimal sin la coma hasta el final del período se le resta la parte entera.

Denominador: tantos nueves como cifras tenga el período.

Ejemplos:

$1,\overset{\frown}{2}=\frac{12-1}{9}=\frac{11}{9}$ $-0,\overset{\frown}{15}=-\frac{15-0}{99}=-\frac{15}{99}=-\frac{5}{33}$

- Si el decimal es periódico mixto:

Numerador: al número decimal sin la coma hasta el final del período se le resta la parte entera seguida del anteperíodo (parte decimal después de la coma y que no es periódica).

Denominador: tantos nueves como cifras tenga el período seguido de tantos ceros como cifras tenga el antiperíodo.

<u>Ejemplos</u>:

$$5,3\overset{\frown}{2}=\frac{532-53}{90}=\frac{479}{90} \qquad -0,7\overset{\frown}{15}=-\frac{715-7}{990}=-\frac{708}{990}=-\frac{354}{495}=-\frac{118}{165}$$

<u>POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES</u>

El concepto de potencia de un nº racional y exponente natural es análogo al conocido para los enteros, así, por ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^4}$$

Así, se define la potencia de base un nº racional, $\frac{a}{b}$, y exponente entero como:

- Si el exponente es entero positivo: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
- Si el exponente es cero: $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$
- Si el exponente es entero negativo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

Estas potencias tienen las mismas propiedades que las potencias de base un nº entero

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}$	2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$
3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$	4) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$
5) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$	6) $\left[\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right)\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{c}{d}\right)^n$

<u>NOTA</u>: Jerarquía de operaciones:

1) Los paréntesis y/o corchetes y empezar por los más internos
2) Potencias
3) Productos y divisiones
4) Sumas y rectas

<u>Ejercicios resueltos</u>:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^5$	2) $\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2}{3}$	4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$
5) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$	6) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-24} = \left(\frac{3}{2}\right)^{24}$
7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{2}{3}$	8) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-2} : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-9} =$ $= \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-13} = \left(\frac{3}{2}\right)^{13}$

3. NÚMEROS IRRACIONALES. NÚMEROS REALES

Hay números decimales con infinitas cifras decimales que no son periódicos como por ejemplo:

3,101001000100001….   -354,145141451414145…..

A estos números los llamamos **irracionales** y se notan por **I**, y son aquellos números que no se pueden representar por una fracción.

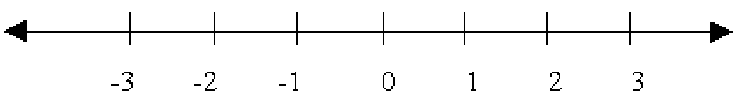
Los números irracionales más conocidos son:

- El número π : π = 3,14159265…..
- El número $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$ = 1,41421356….
- El número de oro ϕ (número áureo): $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,61803398….
- El número e : e = 2,7182818284…….

El conjunto de los números racionales en unión con los números irracionales forman el conjunto de los números reales y se denota por la letra $\mathbb{R}$

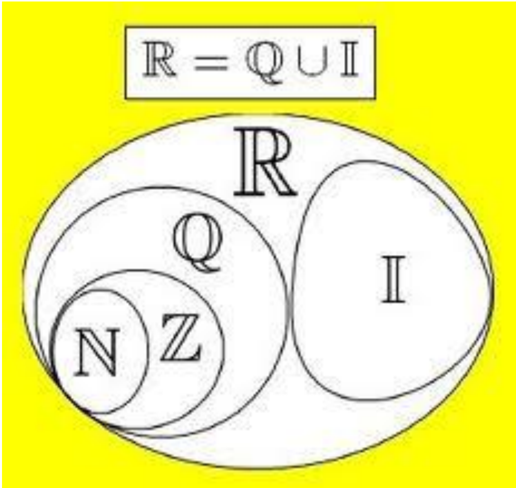
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$$

Los números reales llenan por completo la recta, cada punto de la recta corresponde a un nº real y viceversa. Por eso la llamamos **recta real**



Resumiendo, en un esquema, los conjuntos de números que hemos visto son:

o bien



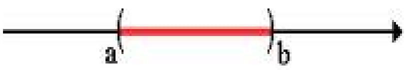
4. INTERVALOS EN LA RECTA REAL

Símbolos matemáticos			
$\in$ Pertenece a	$\notin$ No pertenece a	$\bigcup$ Unión	$\bigcap$ Intersección
$\subset$ Contenido en	$\subseteq$ Contenido o igual a	$\exists$ Existe	$\forall$ Para todo
$\Leftrightarrow$ Sí y sólo si	$\Rightarrow$ Implica	$\neg$ No	$\cong$ Aproximadamente

El **intervalo abierto** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b pero sin incluirlos. Matemáticamente se expresa así: $(a,b)=\{x \in R \text{ tales que } a < x < b\}$

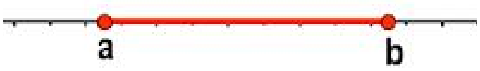
Se representa gráficamente por

ó por

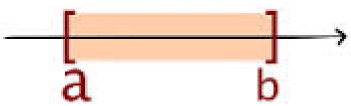


El **intervalo cerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluidos éstos. Matemáticamente se expresa así: $[a,b]=\{x \in R \text{ tales que } a \le x \le b\}$

Se representa gráficamente por



ó por

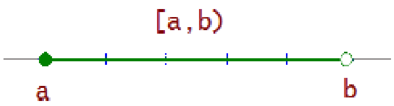


El **intervalo semiabierto o semicerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluido uno sólo de ellos. Matemáticamente se expresa así: $[a,b)=\{x \in R \text{ tales que } a \le x < b\}$ (semiabierto a la izquierda o semicerrado a la derecha)

$(a,b]=\{x \in R \text{ tales que } a < x \le b\}$ (semiabierto a la derecha o semicerrado a la izquierda)

Se representa gráficamente por

Se rellena el extremo que entra dentro del intervalo y sin rellenar el que no está

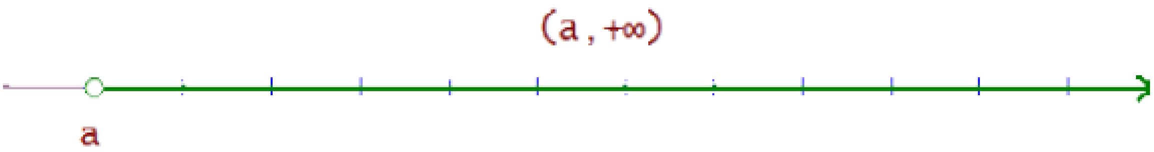


Semirrectas

Las **semirrectas** están determinadas por un número. En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores (o menores) que él.

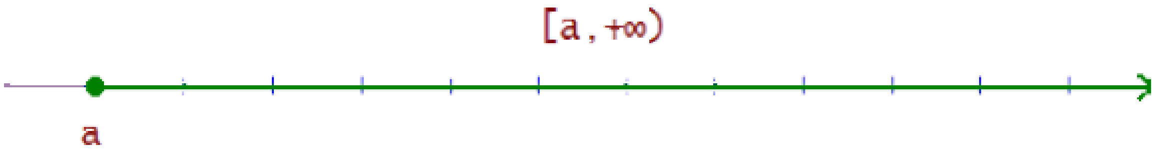
$\mathbf{x > a}$

$(\mathbf{a}, +\infty) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \ / \ \mathbf{a} < \mathbf{x} < +\infty \}$



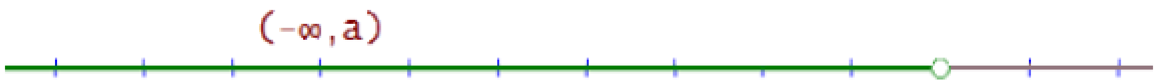
$\mathbf{x \geq a}$

$[\mathbf{a}, +\infty) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \ / \ \mathbf{a} \leq \mathbf{x} < +\infty \}$



$\mathbf{x < a}$

$(-\infty, \mathbf{a}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < \mathbf{x} < \mathbf{a} \}$



$\mathbf{x \leq a}$

$(-\infty, \mathbf{a}] = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \}$

5. APROXIMACIONES DECIMALES. REDONDEOS Y TRUNCAMIENTOS

En ocasiones, ciertos números tales como π, $\sqrt{2}$, 5,675... dificultan el trabajo pues tienen infinitos decimales. En estos casos usamos valores próximos a dichos números para simplificar los cálculos mediante las llamadas aproximaciones

Cuando aproximamos un número, nos quedamos con sus primeras cifras y completamos con ceros. Esas cifras, con las que nos quedamos, se llaman cifras significativas.

Llamamos orden de la aproximación, a la posición hasta la que nos quedamos con cifras significativas. Así hablamos de aproximación a la décima (de orden 1), de aproximación a la centésima (de orden 2), a la milésima (de orden 3), a la diezmilésima (de orden 4), a la cienmilésima (de orden 5), a la millonésima (de orden 6), etc.

Se puede aproximar por defecto si el número utilizado es menor que el de partida, o por exceso si el número utilizado es mayor que el de partida.

Es por ello que surgen los siguientes conceptos:

Una **aproximación decimal de orden n por defecto o truncamiento** es una estimación en la cual todas las cifras, incluida la que indica el orden, son las mismas que en el nº original y las demás son cero.

Una **aproximación decimal de orden n por exceso** es una estimación en la cual todas las cifras, excluida la que indica el orden, son las mismas que en el nº original; la que indica el orden es una unidad más y el resto de ellas son cero.

Ejemplo:

Con el nº π = 3,14159265….., tenemos que la aproximación decimal de orden 3 (a la milésima) por defecto es $\pi \cong$ 3,141

Y la aproximación decimal por exceso de orden 3 (a la milésima) es $\pi \cong$ 3,142

Redondeo

Es la mejor de las aproximaciones de las dos anteriores.

Se aumenta una unidad si el decimal último está comprendido entre 5 y 9.
Y se deja igual si está comprendido ente 1 y 5.

Ejemplo: Aproximación hasta las centésimas (de orden 2):

	Aproximación por defecto o truncamiento	Aproximación por exceso	Redondeo
5,357	5,35	5,36	5,36
7,333 = $7,\hat{3}$	7,33	7,34	7,33

$\sqrt{3}$ = 1,732…	1,73	1,74	1,73
$1,02\hat{7}$ = 1,02777…	1,02	1,03	1,03

6. ERRORES

Error absoluto: Es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor real y la aproximación. Se representa por E_a.

$$E_a = \left|V_{real} - V_{aproximado}\right|$$

Error relativo: Es el cociente del error absoluto y el valor real. Se representa por E_r.

$$E_r = \left|\frac{E_a}{V_{real}}\right|$$

Ejemplo: Calcular los errores cometidos al redondear 5,327 a las centésimas.

Si redondeamos 5,327 a la centésima tenemos 5,33. Así, tenemos que $V_{real} = 5,327$, $V_{aproximado} = 5,33$

Luego, el error absoluto cometido es: $E_a = \left|V_{real} - V_{aproximado}\right| = \left|5'327 - 5'33\right| = \left|-0'003\right| = 0'003$

Y el error relativo es: $E_r = \left|\frac{E_a}{V_{real}}\right| = \left|\frac{0,003}{5,327}\right| = 0,00056$

7. NOTACIÓN CIÉNTIFICA

En cualquier ciencia los números que se deben escribir son a veces muy grandes o muy pequeños, por ejemplo:

El número de átomos de carbono que hay en un gramo:

50 150 000 000 000 000 000 000

Este es un número muy grande, difícil de leer, nombrar y escribir; como así también recordar su valor y para escribirlo se necesita un gran espacio.

La masa expresada en gramos de un solo átomo de carbono:

0,00000000000000000000001994 gramos

Este es un número muy pequeño, pero también es difícil de leer, nombrar, escribir; recordar su valor y para escribirlo así, también se necesita un gran espacio.

Repasaremos a continuación lo que significa la escritura de potencias de base 10 con exponente entero:

$10^6 = 1.000.000$	$10^5 = 100.000$	$10^4 = 10.000$	$10^3 = 1.000$	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$
$10^0 = 1$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$	$10^{-3} = \frac{1}{1.000} = 0,001$	$10^{-4} = \frac{1}{10.000} = 0,0001$	

La notación exponencial o científica consiste en escribir un número a partir de un producto entre otros 2 números, uno llamado coeficiente y el otro, potencia de base 10, cuyo exponente es un número entero. El coeficiente debe cumplir con la condición de que sea mayor o igual a uno y menor que diez.

$C \cdot 10^n$

C = coeficiente (1 ≤ C <10).

n = número entero positivo o negativo

La principal ventaja de este tipo de notación, es que se simplifica la lectura, escritura y el trabajo algebraico de estos números.

Veamos cómo se realiza:

Para números mayores que la unidad:	Para números menores que la unidad:
▪ Cuente el número de lugares que debe moverse de derecha a izquierda para ubicar una coma de tal manera que se forme un número comprendido entre 1 y 10. ▪ Escriba el número formado seguido del signo • y el número 10. ▪ Colóquele al valor de 10 un exponente correspondiente al número de lugares que debió recorrer en el primer punto. ▪ Como el número es mayor que la unidad el signo del exponente es positivo. Ejemplos: 8.500.000 = $8,5 \cdot 10^6$ 50.150.000.000.000.000.000.000 = $5,015 \cdot 10^{22}$	▪ Cuente el número de lugares que debe moverse la coma de izquierda a derecha de tal manera que se forme un número comprendido entre 1 y 10. ▪ Escriba el número formado seguido del signo • y ▪ el número 10. ▪ Colóquele al valor de 10 un exponente correspondiente al número de lugares que debió correr la coma. ▪ Como el número es menor que la unidad, el signo del exponente es negativo. Ejemplos: 0,000043 = $4,3 \cdot 10^{-5}$ 0,00000000000000000000001994 = $1,994 \cdot 10^{-23}$

Otra de las ventajas de la notación exponencial es que se pueden comparar fácilmente dos números para reconocer cual es el mayor o menor. El mecanismo consiste en comparar los dos exponenciales:
- el que tiene una potencia positiva mayor es el mayor
- el que tiene una potencia negativa mayor es el menor
- si las potencias son del mismo orden, se comparan los coeficientes.

Operaciones con números en notación científica

Suma y resta: Para sumar o restar números expresados en notación científica, se requiere que sus exponentes sean iguales, los prefijos se suman normalmente y se coloca la potencia 10 elevada al mismo exponente.

Ejemplo: $2,4 \times 10^3 + 7,1 \times 10^3 = (2.4+7.1) \times 10^3 = 9.5 \times 10^3$

Si los exponentes de las cantidades de la suma no son iguales, debemos recorrer el punto decimal de alguno de los prefijos, con lo cual cambia el exponente de la base de 10. El ajuste se hace de manera que ambos exponentes queden iguales.

Para lograr esto el exponente disminuye en uno por cada lugar que el punto decimal se recorre a la derecha, y que el exponente aumenta en uno por cada lugar que el punto decimal se recorre a la izquierda.

Cuando el punto decimal se recorre a la derecha el exponente disminuye.

Cuando el punto decimal se recorre a la izquierda el exponente aumenta.

Así, la siguiente suma debe ajustarse antes de realizarla.

$(4{,}7 \times 10^{18}) + (6 \times 10^{19}) = (0{,}47 \times 10^{19}) + (6 \times 10^{19}) = 6{,}47 \times 10^{19}$

O bien:

$(4{,}7 \times 10^{18}) + (6 \times 10^{19}) = (4{,}7 \times 10^{18}) + (60 \times 10^{18}) = 64{,}7 \times 10^{18} = 6{,}47 \times 10^{19}$

Multiplicación: Cuando se multiplican potencias que tienen la misma base se suman sus exponentes.
Ejemplo: $(300\,000) \times (200\,000\,000) = (3 \times 10^5) \times (2 \times 10^8) = 6 \times 10^{5+8} = 6 \times 10^{13}$

División: Para dividir números expresados en notación científica, los prefijos numéricos se dividen y al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor.
Ejemplo: $\dfrac{0{,}008}{400} = \dfrac{8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{2}} = \dfrac{8}{4} \cdot \dfrac{10^{-3}}{10^{2}} = 2 \cdot 10^{-3-2} = 2 \cdot 10^{-5}$

8. RADICALES

Se llama **raíz enésima** de un nº a, y se denota por $\sqrt[n]{a}$, a otro número b que cumple que $a = b^n$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, donde a se llama **radicando** y n se llama **índice**

Un mismo nº o radical puede ser escrito de formas diferentes, usando radicales equivalentes, como por ejemplo

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[6]{2^2}$$

Para obtener radicales equivalentes basta multiplicar o dividir por un mismo nº el índice del radical y el exponente del radicando.

Ejemplo: Simplificar los siguientes radicales

$$\sqrt[12]{2^6} = \sqrt[6\cdot 2]{2^6} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[4]{x^3}$$

Ejemplo: Extraer factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x^2} = x \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$
b) $\sqrt{16a^5b^7} = \sqrt{4^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b^2 b^2 \cdot b} = 4 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \sqrt{ab} = 4 \cdot a^2 \cdot b^3 \sqrt{ab}$
c) $\sqrt[3]{64a^6z^3} = \sqrt[3]{2^6 a^6 z^3} = 2^2 \cdot a^2 \cdot z \cdot \sqrt[3]{1} = 4 \cdot a^2 \cdot z$

Ejemplo: Introducir factores en los siguientes radicales:

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$
b) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{\left(a^2\right)^3 \cdot a \cdot b} = \sqrt[3]{a^7 \cdot b}$

Ejemplo: Efectuar las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\frac{4}{5}\sqrt{2}=\left(3-\frac{2}{3}+5-\frac{4}{5}\right)\sqrt{2}=\left(\frac{45-10+75-12}{15}\right)\sqrt{2}=\frac{98}{15}\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{16}-5\sqrt[3]{54}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{250}=2\sqrt[3]{2^4}-5\sqrt[3]{2\cdot 3^3}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}$

$=2\cdot 2\sqrt[3]{2}-5\cdot 3\sqrt[3]{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=-10\sqrt[3]{2}$

Exponente fraccionario: Todo radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario de la siguiente forma $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Las propiedades de las potencias se cumplen igualmente para las potencias de exponente fraccionario.

Ejemplo: Efectúa las siguientes operaciones usando exponente fraccionario:

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}$

b) $\sqrt[5]{2a^4}:\sqrt[5]{2a^3}=\frac{2^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{3}{5}}}=a^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{a}$

c) $a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a}=a^{-1}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

d) $\sqrt[4]{27}:\sqrt[3]{9}=\sqrt[4]{3^3}:\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{3}{4}}:3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{3}$

9. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Al procedimiento por el cual eliminamos los radicales del denominador de una fracción se llama racionalización

Hay diferentes formas:

a) Del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$: Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt{b}$

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

2) $\frac{3}{\sqrt{x-1}}=\frac{3}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{3\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=\frac{3\sqrt{x-1}}{x-1}$

b) Del tipo $\dfrac{a}{b \pm \sqrt{c}}$: Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\dfrac{20}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{20}{3-\sqrt{5}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{20\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{20\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{4} = 5\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)$

2) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{2\left(\sqrt{3}-2\right)}{\sqrt{3}^2-2^2} = \dfrac{2\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}{-1} = -2\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)$

c) Del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$: Análogo al caso anterior

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\dfrac{20}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} = \dfrac{20}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}} = \dfrac{20\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{15}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{20\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)}{10} = 2\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)$

2) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{(x-y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2} = \dfrac{(x-y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

10. LOGARITMO DE UN NÚMERO. LOGARITMO DECIMAL Y LOGARITMO NEPERIANO

Consideremos la ecuación: $2^x = 8$.

Como vemos la incógnita está en el exponente, lo que la hace diferente a todos los tipos vistos hasta ahora. "x" es el exponente al que tenemos que elevar 2 para que de cómo resultado 8.

En matemáticas diremos que "x" es el logaritmo en base 2 de 8

En este ejemplo es fácil ver que x = 3 pues $2^3 = 8$

Definición: Llamamos *logaritmo* en base un nº real a (positivo y distinto de 1) de un nº real b (positivo) como el exponente al que tenemos que elevar a para que de cómo resultado b.

Matemáticamente se representa así: $$\log_a b = z \Leftrightarrow a^z = b$$

Veamos ejemplos para entenderlo mejor:

Ejemplos:

a) $\log_2 8 = 3$ pues $2^3 = 8$, es decir, 3 es el exponente al que hemos de elevar 2 para que de 8	b) $\log_4 16 = 2$ pues $4^2 = 16$, es decir, 2 es el exponente al que hemos de elevar 4 para que de 16
c) $\log_7 7 = 1$ pues $7^1 = 7$, es decir, 1 es el exponente al que hemos de elevar 7 para que de 7	d) $\log_5 5^{-4} = -4$ pues $5^{-4} = 5^{-4}$

e) $\log_{10} 100000 = 5$ pues $10^5 = 100000$	f) $\log_2 \sqrt{2}$ Aquí aplicamos la definición: $\log_2 \sqrt{2} = z \Leftrightarrow 2^z = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^z = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$ Como $\log_2 \sqrt{2} = z = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$
g) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_3 3^{-2} = -2$ También se podía haber hecho con la definición que es lo mismo: $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = z \Leftrightarrow 3^z = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^z = 3^{-2} \Leftrightarrow z = -2$	h) $\log_5 \sqrt{125} = z$, o sea, $5^z = \sqrt{125} \Rightarrow 5^z = \sqrt{5^3} \Rightarrow$ $5^z = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \log_5 \sqrt{125} = \frac{3}{2}$
i) $\log_2 \sqrt[7]{\frac{1}{32}} = z$, o sea, $2^z = \sqrt[7]{\frac{1}{32}} \Rightarrow 2^z = \sqrt[7]{\frac{1}{2^5}} \Rightarrow 2^z = \sqrt[7]{2^{-5}} \Rightarrow 2^z = 2^{\frac{-5}{7}} \Rightarrow$ $\log_2 \sqrt[7]{\frac{1}{32}} = -\frac{5}{7}$	j) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = z$, o sea, $\left(\frac{2}{3}\right)^z = \frac{8}{27} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^z = \frac{2^3}{3^3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^z = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow$ $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = 3$

<u>*Propiedades inmediatas de los logaritmos*</u>:

- El logaritmo en cualquier base del nº 1 es 0

  $\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$

- El logaritmo en cualquier base de la base es 1

  $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$

- El logaritmo en cualquier base de un nº que sea una potencia de la base es el exponente de dicha potencia

  $\log_a a^p = p$ que resulta evidente

- Sólo tienen logaritmos los números positivos, pues como sabemos el resultado de una potencia siempre es positivo. No tiene sentido, por ejemplo, $\log_2(-4)$, no existe

<u>*Logaritmos decimales*</u>

Se llaman logaritmos decimales a aquellos cuya base es 10. También se les conoce como vulgares y en su representación no se pone la base 10, por tanto se notan $\log x$

Ejemplos:

a) $\log 100 = 2$

b) $\log \sqrt[4]{1000000} = \log 10^{\frac{6}{4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

c) $\log 0´0001 = \log 10^{-4} = -4$

Estos logaritmos se pueden obtener con la calculadora, usando la tecla LOG que aparece en ella

Ejemplos:

a) $\log 3 = 0´4777121...$

b) $\log 254 = 2´404833....$

c) $\log \sqrt{805} = 1´452897...$

d) $\log(-100) = Error$ No existes logaritmos de números negativos

Logaritmos neperianos

El nº irracional *e* = 2´71828182… se usa muy a menudo como base de logaritmos.

Se llaman logaritmos neperianos a aquellos cuya base es *e*. También se les conoce como naturales y su representación es $\ln x$ ó $L\,x$

Habitualmente habrá que obtenerlos mediante la calculadora usando la tecla correspondiente ln ó L según el modelo de calculadora.

Ejemplos:

a) $\ln 3 = 1´098612...$

b) $L\sqrt{e} = L\,e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

c) $\ln 179´28 = 5´188948...$

11. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

a) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Ejemplo: Obtener sin calculadora

$$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6(4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2$$

Ejemplo: Sabiendo que $\log_5 x = 3´4$ obtener sin calculadora $\log_5 5x$

Como $\log_5 5x = \log_5 5 + \log_5 x = 1 + 3´4 = 4´4$

b) El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y del divisor

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$$

Ejemplo: Obtener sin calculadora

$$\log_2 6-\log_2 48=\log_2\left(\frac{6}{48}\right)=\log_2\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2 2^{-3}=-3$$

c) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base

$$\log_a m^n=n\cdot\log_a m$$

Ejemplo: Calcular

$$\ln\left(\frac{e}{\sqrt[5]{e^2}}\right)=\ln\left(\frac{e}{e^{\frac{2}{5}}}\right)=\ln e^{\left(1-\frac{2}{5}\right)}=\ln e^{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}\cdot\ln e=\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}$$

d) El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz

$$\log_a\sqrt[n]{m}=\frac{\log_a m}{n}$$

Ejemplo: Calcular

$$\log\sqrt[6]{12}=\frac{\log 12}{6}=0'179863\ldots$$

e) Relación entre logaritmos de distintas bases

El logaritmo en base *a* de un número se puede transformar en el logaritmo de otra base *b* cualquiera mediante la expresión:

$$\log_a m=\frac{\log_b m}{\log_b a}$$

Ejemplo: Obtén con la calculadora de dos formas distintas $\log_{11} 29$:

Pasando a logaritmo decimal: $\log_{11} 29=\dfrac{\log 29}{\log 11}=\dfrac{1'4623\ldots}{1'01413\ldots}=1'40427\ldots$

Pasando a logaritmo neperiano: $\log_{11} 29=\dfrac{\ln 29}{\ln 11}=\dfrac{3'3672\ldots}{2'3978\ldots}=1'40427\ldots$