UNIDAD 4: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Contenido

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que únicamente es cierta para algunos valores de las incógnitas. Los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad son las soluciones de la ecuación.

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones, es decir, los valores que al sustituirlos en la ecuación la convierten en una identidad numérica.

Comprobar la solución consiste en sustituirla en la ecuación y ver si la igualdad obtenida es una identidad.

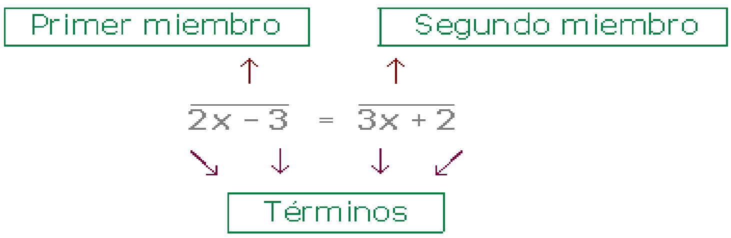
Hay que diferenciar una ecuación de una **identidad** algebraica como $x(x+2) = x^2+2x$ que es cierta para todo valor de x.

Las ecuaciones pueden tener una única incógnita, o más de una. Pueden ser polinómicas o de otro tipo (exponencial, racional, irracional…). En las ecuaciones polinómicas los exponentes de las incógnitas son números naturales. Pueden ser de primer grado, si el exponente más alto de la incógnita es uno, de segundo grado si es dos…

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

Los **miembros** de una ecuación son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.

Los **términos** son los sumandos que forman los miembros.



Ecuaciones de primer grado

Son del tipo $a{\cdot}x+b=0$, con $a \neq 0$ en forma reducida.

En general para resolver una ecuación de primer grado debemos seguir los siguientes pasos:

1º Quitar paréntesis.

2º Quitar denominadores.

3º Agrupar los términos en x en un miembro y los términos independientes en el otro.

4º Reducir los términos semejantes.

5º Despejar la incógnita.

Veamos ejemplos de resolución de ecuaciones de primer grado:

Ejemplo: Resuelve $2\cdot(2x-3)=6+x$

Quitamos paréntesis: $4x-6=6+x$

Agrupamos términos y sumamos: $4x-x=6+6 \Rightarrow 3x=12$

Despejamos la incógnita: $x=\dfrac{12}{3} \Rightarrow \boxed{x=4}$

Ejemplo: Resuelve $\frac{x-1}{6}-\frac{x-3}{2}=-1$

Quitamos denominadores, para ello en primer lugar hallamos el mínimo común múltiplo.

$m.c.m.(6,2)=6$ y ponemos común denominador:

$$\frac{x-1}{6}-\frac{3\cdot(x-3)}{6}=\frac{6\cdot(-1)}{6}$$

Quitamos ahora el común denominador: $x-1-3\cdot(x-3)=-6$

Quitamos paréntesis, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$x-1-3x+9=-6 \Rightarrow x-3x=-6+1-9 \Rightarrow -2x=-14$$

Despejamos la incógnita: $x=\frac{-14}{-2} \Rightarrow \boxed{x=7}$

Ejemplo: Resuelve $\frac{3}{4}\left(2x+4\right)=x+19$

Nos queda operando: $\frac{6x+12}{4}=x+19$

Pasamos el 4 multiplicando al otro miembro o bien hacemos común denominador, que es lo mismo:

$$6x+12=4(x+19)$$

Hacemos el paréntesis:

$$6x+12=4x+76 \Rightarrow 6x-4x=76-12 \Rightarrow 2x=64 \Rightarrow x=\frac{64}{2} \Rightarrow \boxed{x=32}$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación: $\frac{3x+1}{7}-2\frac{1-2x}{3}=\frac{-5x-4}{14}+\frac{7x}{6}$

Hacemos primero el producto para que nos queden las fracciones sin nada raro:

$$\frac{3x+1}{7}-\frac{2-4x}{3}=\frac{-5x-4}{14}+\frac{7x}{6}$$

Calculamos el común denominador:

$$m.c.m.(7,3,14,6)=42$$

$$\frac{6(3x+1)}{42}-\frac{14(2-4x)}{42}=\frac{3(-5x-4)}{42}+\frac{7\cdot 7x}{42}$$

Quitamos denominador y operamos los paréntesis:

$$6(3x+1)-14(2-4x)=3(-5x-4)+49x \Rightarrow$$

$$18x+6-28+56x=-15x-12+49x \Rightarrow 74x-22=-12+34x \Rightarrow 74x-34x=-12+22 \Rightarrow$$

$$40x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{40} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

2. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

La forma general de una ecuación de segundo grado es:
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ con el número real $a \neq 0$ pues sino sería una ecuación de primer grado.

Las soluciones se obtienen mediante la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Por comodidad, resolveremos la ecuación de tres formas distintas según los valores de los coeficientes b y c.
Se llama **discriminante** y se representa por Δ a:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

El signo de Δ nos permite conocer el tipo de soluciones de la ecuación:
- Si $\Delta > 0$, hay dos soluciones reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, hay dos soluciones reales iguales.
- Si $\Delta < 0$, no hay soluciones reales.

Caso 1: Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación es **completa** y sus soluciones las proporciona la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Ejemplo: Resuelve $x^2 + 5 \cdot x + 6 = 0$

Aplicamos la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5+1}{2} = -2 \\ x = \dfrac{-5-1}{2} = -3 \end{cases}$

Ejemplo: Resolver $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Aplicando la fórmula de las soluciones de una ecuación de 2º grado tenemos que:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

De lo anterior tenemos dos soluciones según tomemos el + ó el –

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow x_1 = 1$$
$$x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

En los siguientes casos, las ecuaciones se dice que son **incompletas**:

Caso 2: Si $b = 0$ y $c \neq 0$, la ecuación es de la forma $a \cdot x^2 + c = 0$ y las soluciones son:

$$a \cdot x^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

<u>Ejemplo</u>: Resuelve $2x^2 - 32 = 0$

Las soluciones son $2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = \frac{32}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{32}{2}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$

<u>Ejemplo</u>: Resolver $4x^2 - 9 = 0$

Aplicando lo anterior tenemos que: $4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{matrix}$

<u>Caso 3</u>: Si $b \neq 0$ y $c = 0$, la ecuación es de la forma $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$

Para resolverla sacamos factor común la x:

$$x \cdot (a \cdot x + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ a \cdot x + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>: Resuelve $2x^2 - 10x = 0$

Para resolverla sacamos factor común la x:

$$x \cdot (2 \cdot x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ 2 \cdot x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>: Resuelve: $x^2 + 6x = 0$

Por lo anterior tenemos que, sacando factor común x:

$$x \cdot (x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

<u>Caso 4</u>: Si $b = 0$ y $c = 0$, la ecuación es de la forma $a \cdot x^2 = 0$

La única solución es $x = 0$

<u>Ejemplo</u>: Resuelve $7x^2 = 0$

La única solución es $x = 0$

<u>Ejemplo</u>: Resuelve $x^2 - x + 6 = 0$

Aplicamos la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 24}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2}$ Como no existen raíces cuadradas negativas, deducimos que <u>no tiene solución</u>.

Ejemplo: Resuelve $4x^2-4x+1=0$

Aplicando la fórmula de las soluciones de una ecuación de 2º grado tenemos que:

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{8}=\frac{4\pm0}{8}\Rightarrow x=\frac{4}{8}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Sólo hay una solución que se conoce como solución doble.

Propiedad: Si tenemos una ecuación de 2º grado $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ cuyas soluciones son x_1 y x_2 se cumple que:

- $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ La suma de las soluciones es b partido por a y cambiado de signo
- $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ El producto de las soluciones es c partido por a

Esto es muy útil cuando queremos calcular una ecuación que tenga dos determinadas soluciones y usando como $a=1$. Por ejemplo, supongamos que queremos tener una ecuación cuyas soluciones sean $x_1=-3$ y $x_2=5$. Entonces $x_1+x_2=-3+5=2$ y $x_1\cdot x_2=(-3)\cdot5=-15$. Con esto la ecuación de 2º grado que va a tener esas soluciones es: $x^2-2\cdot x-15=0$

Propiedad: Las soluciones de una ecuación de 2º grado nos sirve para factorizar el polinomio de 2º grado asociado. Así, si las soluciones de la ecuación de 2º grado $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ son x_1 y x_2. Entonces, como ya sabemos, podemos poner $P(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

Ejemplo: Descomponer en factores el polinomio $P(x)=2x^2-x-45$. Las soluciones son $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=\frac{-9}{2}\end{cases}$. Por tanto, nos queda factorizado como sigue $P(x)=2x^2-x-45=2\cdot(x-5)\cdot(x+\frac{9}{2})$

3. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A DOS. ECUACIONES BICUADRADAS

Ecuaciones bicuadradas

Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones que tienen una forma similar a las ecuaciones de segundo grado completas.

Son ecuaciones de cuarto grado, que tienen términos con x elevada a 4, x elevada a 2 y sólo con número. Al ser de cuarto grado, pueden tener hasta 4 soluciones.

Son de la forma: $a\cdot x^4+b\cdot x^2+c=0$

Las **ecuaciones bicuadradas** se resuelven casi igual que las ecuaciones de segundo grado completas, pero con la diferencia de que antes es necesario realizar **un cambio de variable** y al final, deshacer éste cambio para obtener las cuatro soluciones finales. Veamos cómo se hace:

1. Partimos de la ecuación bicuadrada $a\cdot x^4+b\cdot x^2+c=0$ y realizamos un **cambio de variable.** Esto se hace porque necesitamos que le ecuación bicuadrada tenga la misma forma que una ecuación de segundo grado

completa. El cambio de variable que hay que realizar es el siguiente: $\begin{cases} t^2 = x^4 \\ t = x^2 \end{cases}$ y la nueva ecuación queda de la siguiente forma: $a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$

2. Aplicamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado completas a la ecuación con la nueva variable, de donde obtendremos dos soluciones:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \text{(y nos pueden salir dos soluciones)=} \begin{cases} t_1 \\ t_2 \end{cases}$$

3. Hemos obtenido 2 soluciones, pero con nuestra nueva variable t. Necesitamos deshacer el cambio de variable para llegar a las 4 soluciones de x de la ecuación original.

   Es decir, a partir del cambio de $x^2 = t$, como ya conocemos t, despejamos la x

$$x^2 = t_1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_1}$$
$$x^2 = t_2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_2}$$

Veamos con un ejemplo la aplicación de esta explicación:

<u>Ejemplo</u>: Resuelve $x^4 - 34 \cdot x^2 + 225 = 0$

Hacemos el cambio $\begin{cases} t^2 = x^4 \\ t = x^2 \end{cases}$ y nos queda la ecuación de 2º grado: $t^2 - 34 \cdot t + 225 = 0$

Procedemos a resolverla por la fórmula:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 225}}{2 \cdot 1} = \frac{+34 \pm \sqrt{1156 - 900}}{2} = \frac{+34 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{34 \pm 16}{2} \Rightarrow$$

$$t = \frac{34 \pm 16}{2} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{34+16}{2} = 25 \\ t_2 = \dfrac{34-16}{2} = 9 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio:

Para $x^2 = t_1 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

Para $x^2 = t_2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ Como observamos hay 4 soluciones 5, -5, 3 y -3.

<u>Ejemplo</u>: Resolver $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Nos damos cuenta de que la ecuación se puede poner de la siguiente forma $[x^2]^2 - 13[x^2] + 36 = 0$, que se puede entender como una ecuación de 2º grado en $[x^2]$, y aplicando la fórmula tenemos que:

$x^2 = \dfrac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} \rightarrow x^2 = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$ Estas son las soluciones de x^2

y para cada una de ellas resolvemos: $\begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$ Por tanto nos salen cuatro soluciones.

<u>Ejemplo</u>: Resolver $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Análogamente tenemos que darnos cuenta que se puede poner como $[x^2]^2 - 3[x^2] - 4 = 0$ y resolvemos

$x^2 = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{No existe} \end{cases}$ En este caso sólo hay dos soluciones

<u>Ecuaciones de grado superior a dos</u>

Para resolver ecuaciones de este tipo aplicamos la descomposición factorial de polinomios que hemos dado en la unidad anterior. Veamos con ejemplos como se hacen

<u>Ejemplo</u>: Resuelve la ecuación $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

Se trata de una ecuación de tercer grado.

Consideremos el polinomio dado en el primer miembro de la ecuación $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ y vamos a descomponerlo en factores, aplicando Ruffini sucesivamente.

Las posibles raíces son los divisores de +6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ y ahora Ruffini. No ponemos los que no dan resto 0

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	6
	1	1	-6	0
2		2	6	
	1	3	0	
-3		-3		
	1	0		

Ya tenemos descompuesto el polinomio $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 1 \cdot (x+3) \cdot (x-2) \cdot (x+1)$

Volvemos a la ecuación $(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)=0$ que como vemos es el producto de tres factores igualado a 0. Para que el producto sea 0, alguno de los factores debe ser nulo, y de ello obtenemos tres ecuaciones de primer grado que ya sabemos resolver:

$(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-2=0 \\ x+1=0 \end{cases}$ Las soluciones son: $\begin{cases} x=-3 \\ x=2 \\ x=-1 \end{cases}$

Ejemplo: Resuelve la ecuación: $x^3-x=0$

En este caso primero aplicamos la extracción de factor común: $x\cdot(x^2-1)=0$

Igualamos cada factor a 0:

$$x\cdot(x^2-1)=0\begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases}$$

Hay 3 soluciones $x=0, x=1, x=-1$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^4-x^3+2x^2-4x-8=0$

Aplicamos Ruffini para descomponer hasta que lleguemos a un polinomio de 2º grado como cociente

	1	-1	2	-4	-8
-1		-1	2	-4	8
	1	-2	4	-8	0
2		2	0	8	
	1	0	4	0	

Así nos queda, $x^4-x^3+2x^2-4x-8=(x+1)(x-2)(x^2+4)=0 \rightarrow$

$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-4} \Rightarrow \text{No tiene soluciones} \end{cases}$ Luego en esta ecuación sólo hay dos soluciones $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO CON DOS INCÓGNITAS

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas será de la forma: $\begin{cases} a\cdot x+b\cdot y = c \\ d\cdot x+e\cdot y = f \end{cases}$ en forma reducida donde a,b,d,e son los coeficientes, x,y son las incógnitas y c,f son los términos independientes.

Ejemplo: Son sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+3y=5 \\ x-5y=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{3}+\dfrac{3y+1}{2}=5 \\ x-\dfrac{1-5y}{2}=3 \end{cases}$$ (este sistema no está en forma reducida)

Veamos cómo se resuelven por diferentes métodos y mediante ejemplos:

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. Se despeja una incógnita de una ecuación (la que te parezca más fácil de despejar)
2. Se sustituye en la otra ecuación, quedando una ecuación de primer grado.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido para la incógnita lo sustituyes en una de las ecuaciones y operando sacas la otra.

¡Atención!! En el paso 3 pueden suceder tres situaciones:

- Si llegas a 0 = 0 entonces hay infinitas soluciones
- Si llegas a 0 = k (k distinto de cero) no hay solución
- Si llegas a un valor entonces hay una solución única y haces el paso 4

Veamos un ejemplo:

Ejemplo: Resuelve por sustitución el sistema: $\begin{cases} 3x-2y & = & 10 \\ x+3y & = & 7 \end{cases}$

1. Despejamos una incógnita (la que queramos) de una de las ecuaciones, en este caso de la 2ª ecuación, la "x".
$$\begin{cases} 3x-2y & = & 10 \\ x+3y & = & 7 \quad \Rightarrow \quad x=7-3y \end{cases} \quad \text{(hemos elegido la más fácil de despejar)}$$
2. Sustituimos el valor de la incógnita despejada en su lugar en la otra ecuación
$3x-2y=10 \Rightarrow 3\cdot(7-3y)-2y=10$
3. Resolvemos la ecuación obtenida en (b)
$3\cdot(7-3y)-2y=10 \Rightarrow 21-9y-2y=10 \Rightarrow -9y-2y=10-21 \Rightarrow -11y=-11$
$\Rightarrow 11y=11 \Rightarrow y=1$
4. Volvemos a la ecuación de la incógnita despejada al principio, para calcular el valor de esa incógnita
$x=7-3y \Rightarrow x=7-3\cdot1 \Rightarrow x=7-3 \Rightarrow x=4$
5. Damos la solución

$x=4$
$y=1$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

1. Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones (la que te parezca más fácil de despejar)

2. Se igualan las expresiones quedando una ecuación con una incógnita
3. Se resuelve la ecuación
4. El valor obtenido para la incógnita lo sustituyes en una de las ecuaciones y operando sacas la otra. También se puede sustituir en una de las dos ecuaciones obtenidas en el punto 1.

¡Atención!! En el paso 3 pueden suceder las tres situaciones descritas anteriormente Este método es útil cuando la misma incógnita aparece ya despejada de las dos ecuaciones, en otro caso es más conveniente emplear cualquiera de los otros métodos pues son más cortos.

Ejemplo: Resolver por igualación el sistema $\begin{cases} -2x+3y & = & 5 \\ 4x+y & = & 4 \end{cases}$

1. Despejamos la misma incógnita (la que resulte más cómoda) de las dos ecuaciones. En este sistema vamos a despejar la incógnita "y"

$$\begin{cases} -2x+3y=5 & \Rightarrow \quad 3y=5+2x \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{5+2x}{3} \\ 4x+y=4 & \Rightarrow \quad y=4-4x \end{cases}$$

2. Igualamos las expresiones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{5+2x}{3} \\ y=4-4x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5+2x}{3}=4-4x$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{5+2x}{3}=4-4x \Rightarrow \frac{5+2x}{3}=\frac{12-12x}{3} \Rightarrow 5+2x=12-12x \Rightarrow 2x+12x=12-5 \Rightarrow 14x=7$$

$$\Rightarrow x=\frac{7}{14} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

4. Calculamos la otra incógnita sustituyendo el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las dos expresiones obtenidas al principio, en (a), se elige la más fácil.

$$y=4-4x \Rightarrow y=4-4\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y=4-2 \Rightarrow y=2$$

5. Se da la solución:

$x=\dfrac{1}{2}$	$y=2$

MÉTODO DE REDUCCIÓN O DE GAUSS

Antes de desarrollar este método recuerda que dada una ecuación $ax+by=c$, otra equivalente (con las mismas soluciones) se puede obtener multiplicando toda la ecuación por un número distinto de cero.

Así las siguientes ecuaciones tienen las mismas soluciones $2x+y=1$, $10x+5y=5$, $4x+2y=2$.

Para aplicar el método de reducción se multiplicarán las dos ecuaciones o una de ellas por un número conveniente de manera que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente cambiado de signo en las dos ecuaciones.

1. Se elige la incógnita (la que te parezca más fácil)
2. Se hace que los coeficientes de dicha incógnita en las dos ecuaciones sean opuestos.
3. Se suman las dos ecuaciones quedando una ecuación con una incógnita que se resuelve.
4. Se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.

¡¡Atención!! En el paso 3 pueden suceder las tres situaciones descritas anteriormente.

<u>Ejemplo</u>: Resuelve por reducción el sistema $\begin{cases} -2x+3y &= 5 \\ 4x+y &= 4 \end{cases}$

1. Elegimos la incógnita a reducir, por ejemplo, en este caso, la y
2. Multiplicamos por (-3) la segunda ecuación
$$\begin{cases} -2x+3y &= 5 \\ -12x-3y &= -12 \end{cases}$$
3. Sumamos las dos ecuaciones y de esa manera la y desaparece y podemos calcular fácilmente la otra incógnita, x
$$\begin{array}{rcr} -2x+3y &=& 5 \\ -12x-3y &=& -12 \\ \hline -14x &=& -7 \end{array} \Rightarrow x=\frac{-7}{-14} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$
4. Sustituimos en una de las ecuaciones y calculamos la incógnita y, en este caso en la primera ecuación:
$$4\cdot\frac{1}{2}+y=4 \Rightarrow 2+y=4 \Rightarrow y=2$$
5. Damos la solución

$x=\frac{1}{2}$	$y=2$

<u>SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO</u>

Un sistema de ecuaciones es de 2º grado cuando alguna de las incógnitas es de 2º grado

Para resolverlos tenemos dos métodos

- *<u>Método de sustitución</u>*: Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra la expresión obtenida. Y la ecuación resultante se resuelve por los métodos adecuados. Este método es el más usado.
- *<u>Método de igualación</u>*: Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas. Y resolvemos por los métodos adecuados la ecuación resultante. Es menos usado.

__Ejemplo__: Resolver el sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$

De la 1ª ecuación despejamos por ejemplo la x y nos resulta:

$$\boxed{x=4-y}$$

Sustituimos en la 2ª ecuación, $(4-y)^2+y^2=40$ →(desarrollamos) $16-8y+y^2+y^2=40$ →(agrupamos *y* tenemos una ecuación de 2º grado en y) $2y^2-8y-24=0$ →(simplificamos por 2) $y^2-4y-12=0$

→(resolvemos la ecuación de 2º grado) $y=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot1}$ → → $y=\dfrac{4\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\dfrac{4\pm8}{2}=\begin{cases} y_1=6 \\ y_2=-2 \end{cases}$

Estos valores de *y* nos conducen a las soluciones del sistema calculando sus correspondientes *x*:

$y_1=6$ → $x_1=4-6=-2$ → $\boxed{x_1=-2,\ y_1=6}$ Esta es una solución del sistema, un par de valores

$y_2=-2$ → $x_1=4-(-2)=6$ → $\boxed{x_1=6\ \ y_1=-2}$ Esta es la otra solución del sistema, un par de valores

__Ejemplo__: Resolver el sistema $\begin{cases} x^2+y=x+1 \\ 2x^2+y=3 \end{cases}$

Vamos a hacerlo por igualación (se puede hacer perfectamente por sustitución también). Despejamos la *y* de las dos ecuaciones $\begin{cases} y=-x^2+x+1 \\ y=-2x^2+3 \end{cases}$ Igualamos ahora las dos expresiones de *y* que tenemos:

$-x^2+x+1=-2x^2+3$ Y resolvemos esa ecuación de 2º grado:

$-x^2+x+1+2x^2-3=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{cases}$

Para cada valor de *x* calculamos su correspondiente *y* usando cualquiera de las dos expresiones despejadas:

$x_1=1$ → $y_1=-2\cdot1^2+3=-2+3=1$ → $\boxed{x_1=1,\ y_1=1}$

$x_1=-2$ → $y_1=-2\cdot(-2)^2+3=-8+3=-5$ → $\boxed{x_1=-2,\ y_1=-5}$

__Nota__: Habitualmente el más usado es el método de sustitución

5. SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TRES INCÓGNITAS. MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss es una generalización del método de reducción y consiste en transformar un sistema dado en otro equivalente de manera que sea triangular y muy fácil de resolver. Este método es el más usado para sistemas de más de dos incógnitas y vamos a ver cómo funciona con un ejemplo práctico

Ejemplo: Vamos a resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$

Observamos que tenemos 3 ecuaciones que las identificamos por E_1, E_2 y E_3

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Longrightarrow$$

Cambiamos o permutamos la E_1 la E_2. Lo notaremos por $E_1 \leftrightarrow E_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

A la E_2 le restamos el doble de la ecuación E_1. Lo notaremos por:

$$E_2 \leftrightarrow E_2 - 2E_1$$

$$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ (2x+y-z)-2\cdot(x-y+2z)=0-2\cdot 5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Operamos y obtenemos una nueva E_2 donde no aparece ya la incógnita x

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3y-5z=-10 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

A la E_3 le restamos la E_1

$$E_3 \leftrightarrow E_3 - E_1 \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3y-5z=-10 \\ 2y-z=-2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Ya tenemos la x triangulada. Ahora con la y hacemos lo mismo pero sólo con la E_2 y la E_3

Multiplicamos por 2 la E_2 y por 3 la E_3. Lo notamos como

$$E_2 \leftrightarrow 2E_2$$
$$E_3 \leftrightarrow 3E_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 6y-10z=-20 \\ 6y-3z=-6 \end{cases}$$

Ahora efectuamos los siguiente

$E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 6y - 10z = -20 \\ 7z = 14 \end{cases}$$

Simplificamos la E_2

$E_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} E_2$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3y - 5z = -10 \\ 7z = 14 \end{cases}$$

Ya podemos calcular *z* de la E_3

$\boxed{z = \frac{14}{7} = 2}$

En la E_2 sustituimos *z* y calculamos y

$3y - 10 = -10 \rightarrow$

$\boxed{y = 0}$

En la E_1 sustituimos *y* y *z* para calcular *x*

$x - 0 + 4 = 5 \rightarrow$

$\boxed{x = 1}$

La solución del sistema es: $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}}$

<u>Ejemplo</u>: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases} \xRightarrow{E_2 \to E_2 - 3 \cdot E_1} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ -5y + 7z = 38 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases} \xRightarrow{E_3 \to E_3 - 2 \cdot E_1}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ -5y + 7z = 38 \\ -7y + 7z = 28 \end{cases} \xRightarrow{E_3 \to \frac{1}{7} E_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ -5y + 7z = 38 \\ -y + z = 4 \end{cases} \xRightarrow{E_2 \to E_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ -y + z = 4 \\ -5y + 7z = 38 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{E_2 \to -5E_2} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 5y - 5z = -20 \\ -5y + 7z = 38 \end{cases} \xRightarrow[E_2 \to \frac{1}{5} E_2]{E_3 \to E_3 + E_2} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ y - z = -4 \\ 2z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ y - z = -4 \\ z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ y-9=-4 \Rightarrow y=5 \\ z=9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+10-27=-16 \\ y=5 \\ z=9 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ z=9 \end{cases}}$$

Ejemplo: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ x-2z=3 \end{cases}$

Operemos

$$\begin{cases} x & -y & & = & 1 \\ & y & -z & = & 1 \\ x & & -2z & = & 3 \end{cases} \Rightarrow (E_3-E_1) \begin{cases} x & -y & & = & 1 \\ & y & -z & = & 1 \\ & y & -2z & = & 2 \end{cases} \Rightarrow (E_3-E_2) \begin{cases} x & -y & & = & 1 \\ & y & -z & = & 1 \\ & & -z & = & 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Resolvemos: De la E_3, obtenemos que $z=-1$

Sustituimos en E_2 y obtenemos que $y+1=1 \Rightarrow y=0$

Sustituimos en E_1 y obtenemos que $x-0=1 \Rightarrow x=1$