UNIDAD 6: FUNCIONES REALES. PROPIEDADES GLOBALES

Contenido

1. INTRODUCCIÓN

<u>Puntos y coordenadas</u>

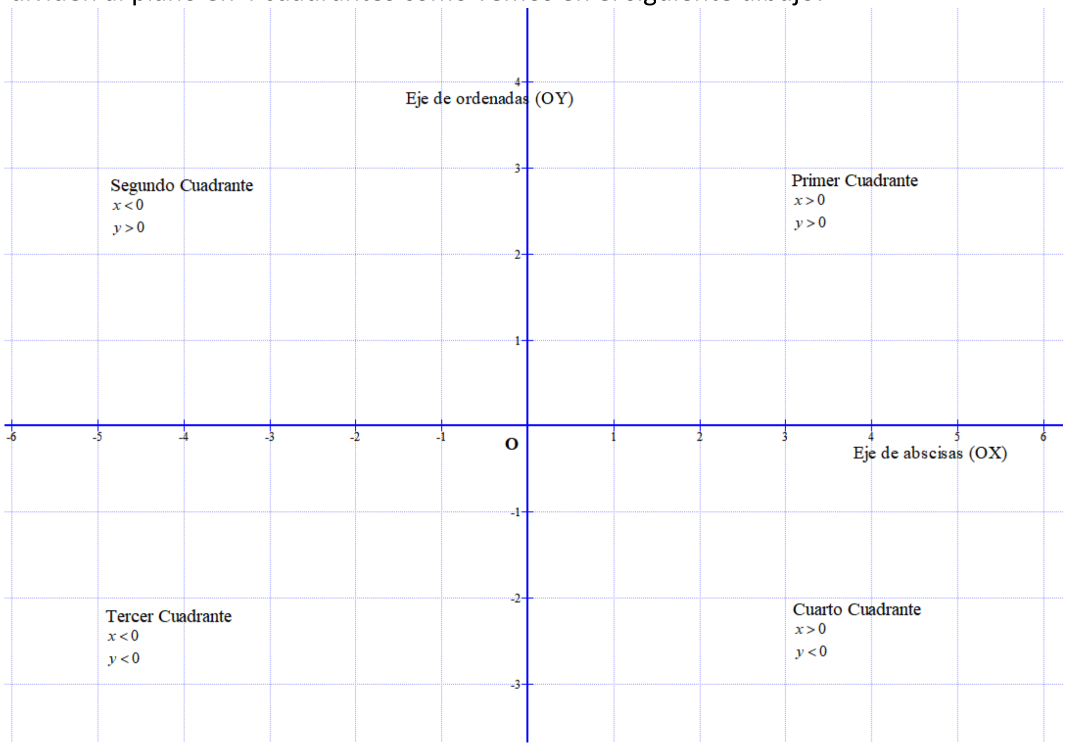
Para representar en el plano se toman dos rectas perpendiculares OX y OY, llamadas ejes de coordenadas. El eje OX se llama <u>eje de abscisas</u> y el eje OY <u>eje de ordenadas</u>. El punto O es el origen de coordenadas.

Cada uno de estos ejes se gradúa con números positivos y números negativos. De este modo, a cada punto P del plano le corresponde un par de números (x, y) que llamamos <u>coordenadas</u> del punto.

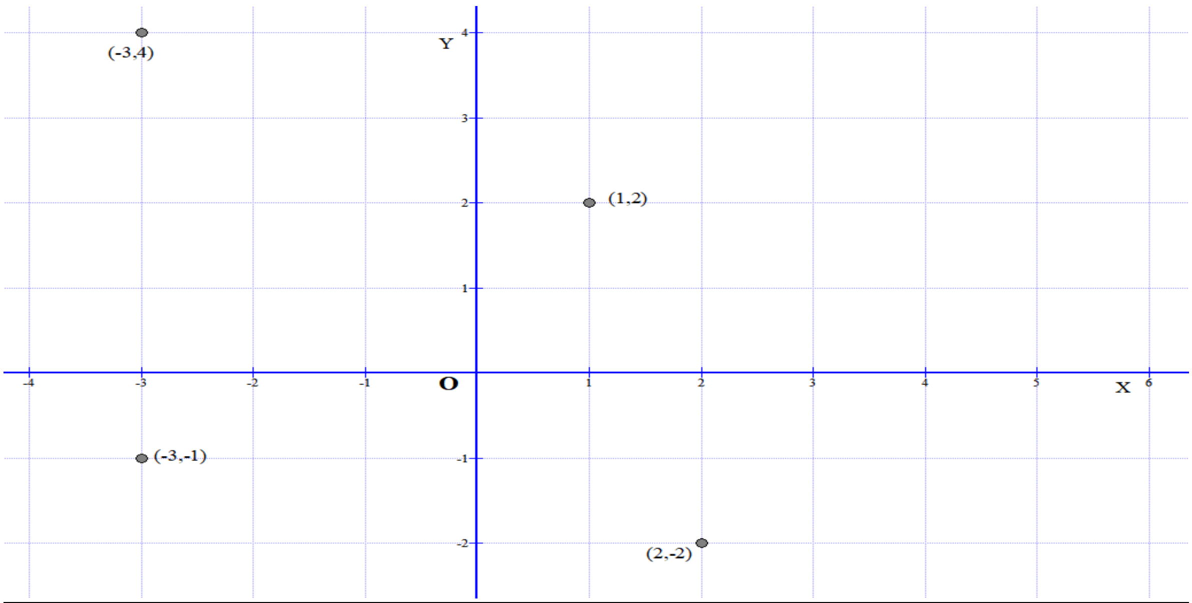
El 1er número o 1ª coordenada “ x ” corresponde al eje horizontal (abscisa).

El 2º número ó 2ª coordenada “ y ” corresponde al eje vertical (ordenada)

Estos dos ejes dividen al plano en 4 cuadrantes como vemos en el siguiente dibujo:



<u>Ejemplo</u>: Representar en el plano los siguientes puntos (1, 2), (-3,4), (2,-5), (-4, -3)



2. EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN

- *Expresión mediante una tabla de valores*

La tabla de valores de una función está formada por dos filas o columnas. En la primera fila o columna figuran los valores que toma la variable y en la segunda fila o columna están los valores correspondientes que toma la variable dependiente

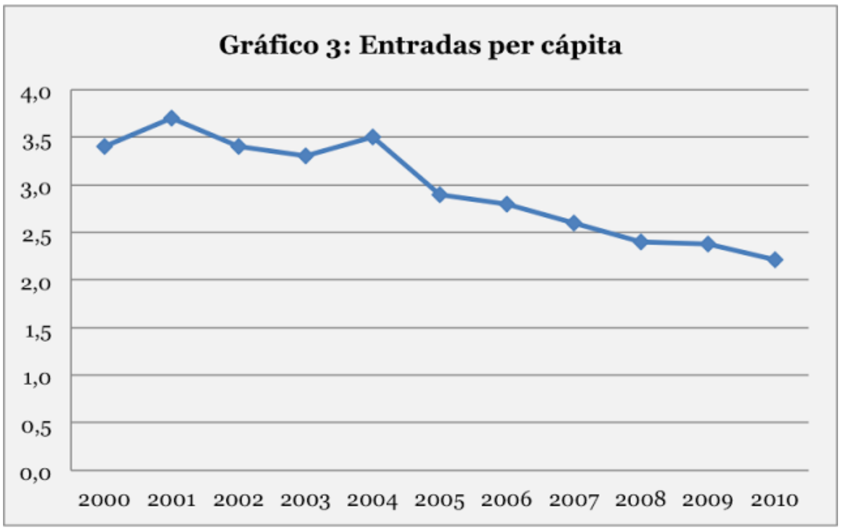
Ejemplo: Tabla de valores de la función que nos da los precios de la tarifa doméstica de la luz en los años que se indican:

Años (variable independiente)	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Precio luz (€/MWH)	118,2	107,7	102,4	99,7	96,7	96,7	97,1	97,1	98,1

- *Expresión mediante una gráfica*

Las gráficas nos dan una visión cualitativa de las funciones sobre unos ejes coordenados

Ejemplo: Función que nos da las entradas de cine por persona compradas a lo largo de un año.



- *Expresión mediante una fórmula matemática o expresión algebraica*

La expresión algebraica o fórmula matemática permite calcular los valores de la variable dependiente para todos los valores que demos a la variable independiente. Se dice que la función viene dada por un criterio o fórmula.

Ejemplo: El área de un cuadrado de lado l viene dado por la función $Área(l) = l^2$

- *Expresión mediante la descripción verbal*

La descripción verbal nos proporciona una visión descriptiva y cualitativa de la relación funcional

Ejemplo: La función que liga el precio que hemos de pagar al frutero en función de la cantidad de manzanas que compremos, sabiendo que el kilogramo cuesta 0,80 €

Esta función la podemos fácilmente transformar en una expresión como sigue:

$f(x) = 0{,}80 \cdot x$ donde $x =$ nº de kilogramos de manzanas

3. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. DOMINIO Y RECORRIDO

Definición: Una función es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, tal que para cada valor de x le corresponde un único valor de y.

La magnitud cuyos valores se pueden elegir libremente se denomina variable independiente y se suele designar por la letra x.

La magnitud cuyos valores se obtienen por la relación funcional es la variable dependiente y se suele designar por la letra y.

Una función, f , que asocia a cada valor de x un valor de y, la representamos por $y = f(x)$.

<u>Ejemplo</u>: Una función cuya relación es $y = 5x^2 - 1$, expresa que la variable y depende de la variable x, por eso se llama a x variable independiente, y a y variable dependiente.

Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica: sobre unos ejes cartesianos, con sendas escalas, representamos las dos variables:

· La x sobre el eje horizontal o eje de abscisas.

· La y sobre el eje vertical o eje de ordenadas.

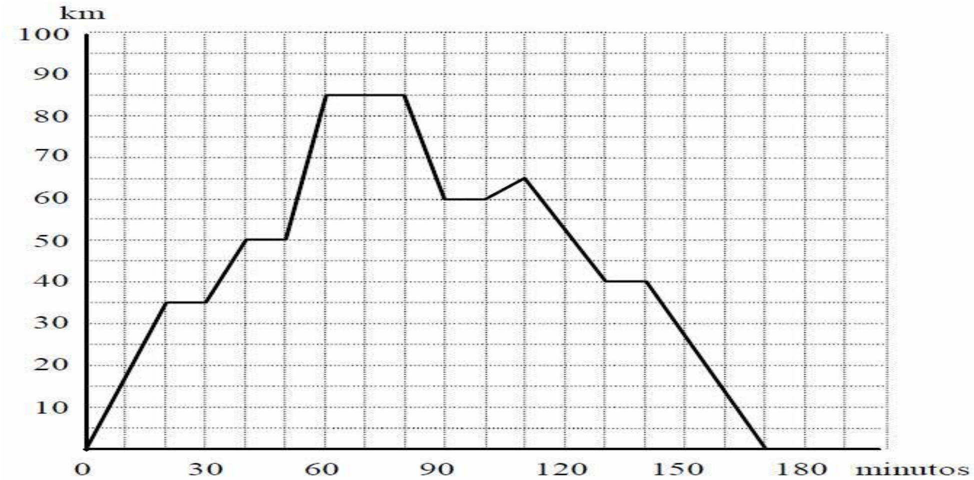
Cada punto de la gráfica tiene dos coordenadas, su abscisa, x, y su ordenada, y.

<u>Ejemplo</u>: La gráfica representa la distancia al punto de salida, en un viaje en coche, en función del tiempo. Por ejemplo, a los 40 min, la distancia es: 50 km Si representamos por:

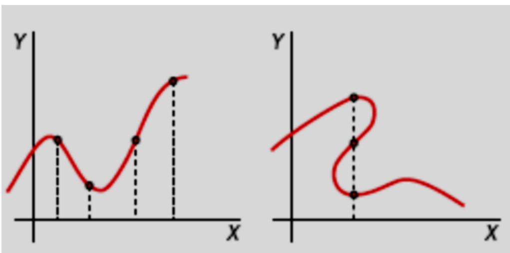
x = tiempo que es la variable independiente

y = distancia que es la variable dependiente, depende del tiempo

Vemos que a cada valor de la x (el tiempo) corresponde un único valor de la y (la distancia). Esta gráfica representa a una función.



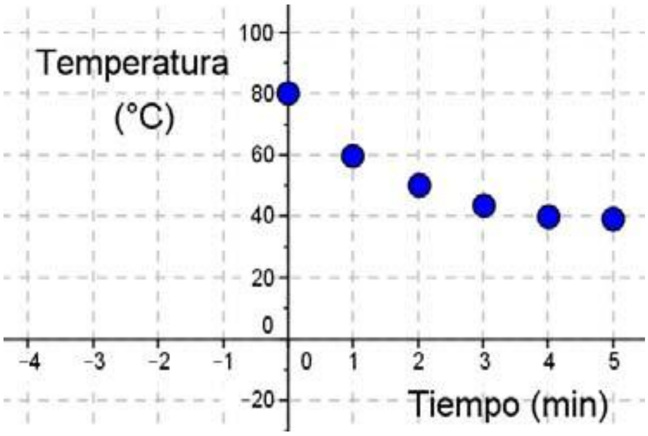
<u>Ejemplo</u>: La primera gráfica corresponde a una función: a cada valor de x le corresponde un único valor de y. La segunda gráfica no es de una función: hay valores de x que les corresponde más de un y.



<u>Ejemplo</u>: La sopa estaba muy caliente, así que la dejé enfriar durante cinco minutos. La temperatura de la sopa, según se enfriaba, la indica la tabla siguiente:

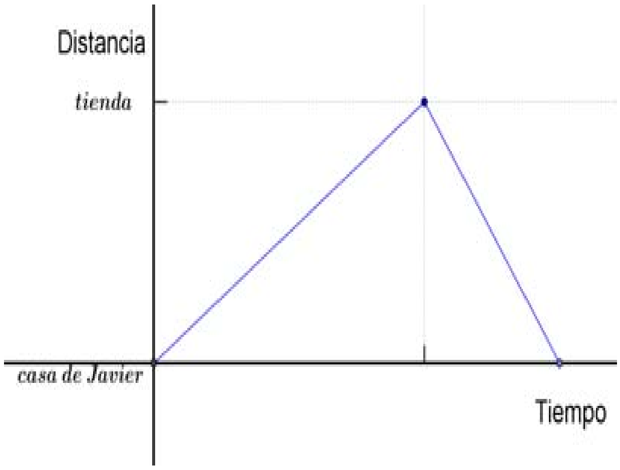
Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Si representamos todos los pares de datos de la tabla de valores del ejemplo obtenemos la siguiente gráfica:



Ejemplo: Javier tiene que ir a comprar a una tienda algo alejada de su casa, como no tiene prisa decide ir dando un paseo. Justo cuando llega a la tienda se da cuenta de que se le ha olvidado la cartera y no tiene dinero para comprar. Corriendo vuelve a su casa a por la cartera.

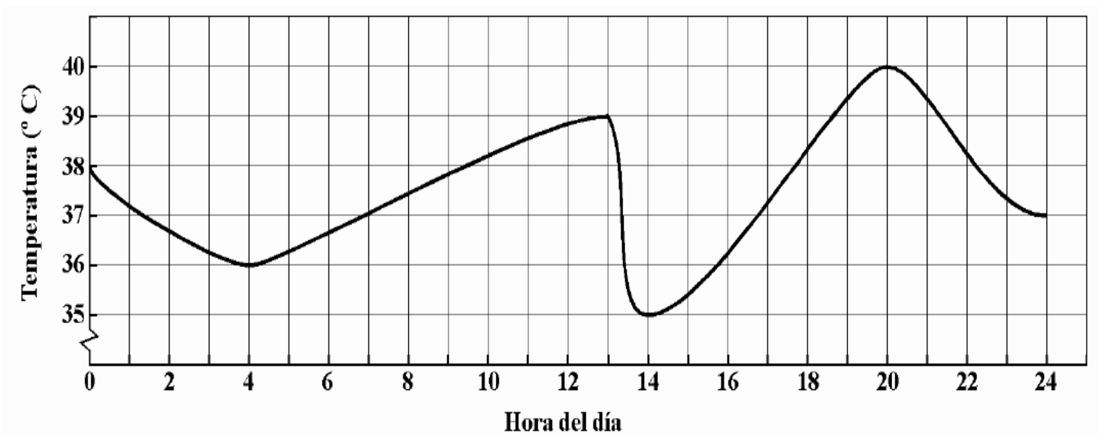
A partir de este enunciado podemos elaborar una gráfica como la de la derecha:
Nota: la distancia entre la casa de Javier y la tienda no la conocemos, pero sabemos que en la vuelta ha tardado menos tiempo que en la ida.



Definición: Se llama dominio de definición o simplemente dominio de una función f, y se designa por $Dom(f)$, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función, es decir, para los cuales hay un $f(x)$.
El dominio se encuentra en el eje de abscisas o eje OX

Definición: La imagen o recorrido de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente y (variable que se deduce de la variable independiente). Se representa por $\mathrm{Im}(f)$ o por $\mathrm{Recorr}(f)$.
La imagen se encuentra en el eje de ordenadas o eje OY

Ejemplo: La siguiente gráfica representa la variación de la temperatura de un enfermo de un hospital a lo largo de un día



a) ¿Cuál es la variable independiente? **hora del día = x**

b) ¿Cuál es la variable dependiente? **temperatura = y**

c) ¿A qué hora estaba peor? **A las 20 h**

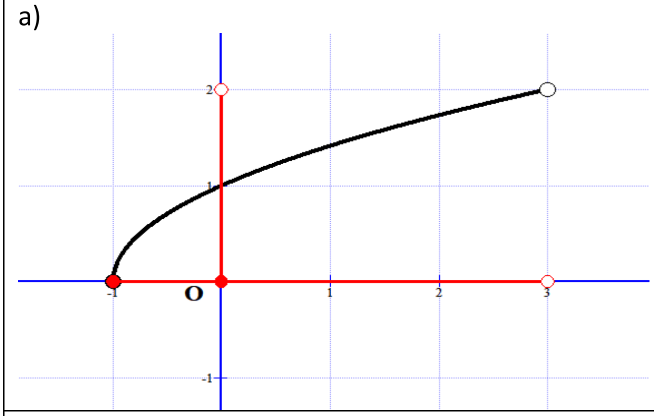
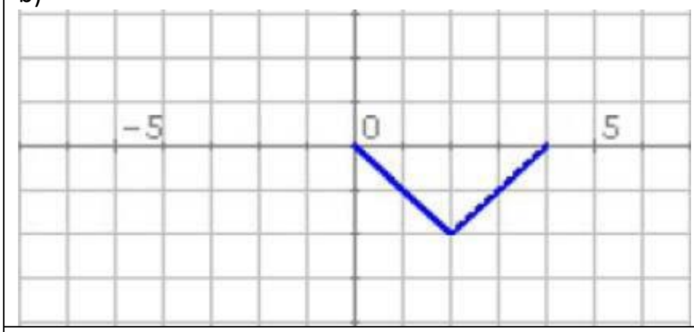
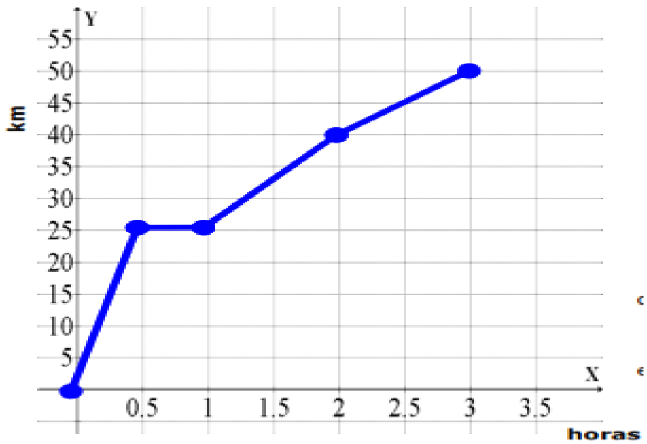
d) ¿En qué momento la temperatura fue anormalmente baja? **A las 14 h**

e) ¿Cuál es el dominio de definición? **0h – 24 h**

f) ¿Cuál es el recorrido? **35ºC – 40ºC**

g) ¿Por qué aparece una línea quebrada entre 0 y 35? **No nos interesan temperaturas menores de 35 ºC**

Ejemplo: Di el dominio y la imagen de cada función siguiente dada por su gráfica:

a) 	Su dominio es: $Dom(f) = [-1, 3)$ Su imagen es: $\mathrm{Im}(f) = [0, 2)$
b) 	Su dominio es: $Dom(f) = (0, 4)$ Su imagen es: $\mathrm{Im}(f) = [-2, 0)$
c) 	Su dominio es: $Dom(f) = [0, 3]$ Su imagen es: $\mathrm{Im}(f) = [0, 50]$

PUNTOS DE CORTE DE UNA FUNCIÓN CON LOS EJES DE COORDENADAS

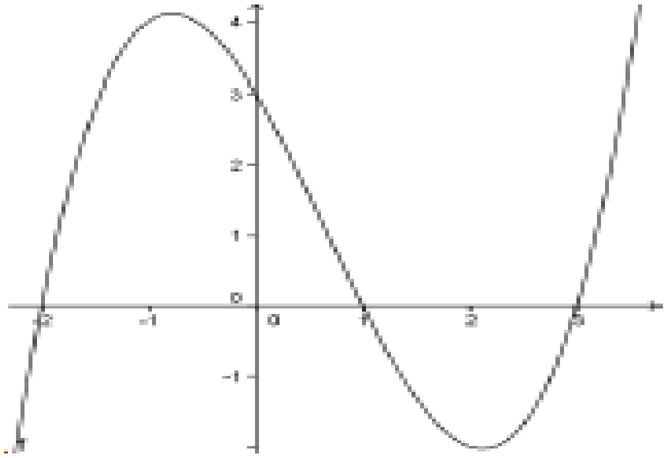
Son los puntos de intersección de la función con los ejes:

- Con el eje de abscisas (eje OX) son de la forma $(x, 0)$, donde el valor x se calcula resolviendo la ecuación $f(x) = 0$ o bien si tenemos la gráfica mirar los puntos que pasan por el eje horizontal (OX).

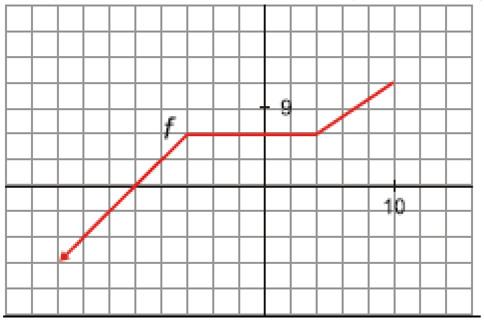
- Con el eje de ordenadas (eje OY) son de la forma $(0, y)$ donde y se obtiene hallando $f(0)$ o bien si tenemos la gráfica ver el punto que pasa por el eje vertical (OY).

Ejemplo: La función siguiente tiene los siguientes puntos de corte:

- Con el eje de abscisas son: A(- 2,0), B(1,0) y C(3,0)
- Con el eje de ordenadas: D(0,3) como se puede observar en su gráfica .



Ejemplo: Los puntos de corte con los ejes de la siguiente función son:



Con el eje de abscisas (eje OX):
(-5,0)
Con el eje de ordenadas (eje OY):
(0,2)

Ejemplo: Dada la función $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-2}$, calcula:

a) La imagen de 4, la imagen de -1 y los originales de 0.

Para calcular las imágenes basta sustituir la x por el valor:

Imagen de $x=4$: $f(4)=\dfrac{4+3}{4^2-2}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$. Esto también nos dice que la función pasa por el punto $\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$

Imagen de $x=-1$: $f(-1)=\dfrac{-1+3}{(-1)^2-2}=\dfrac{2}{-1}=-2$. Esto también nos dice que la función pasa por el punto $(-1,-2)$

Para calcular los originales, ahora es la y , o sea, $f(x)$ la que sabemos lo que vale y tenemos que calcular x : en este caso $0=\dfrac{x+3}{x^2-2}$ Para que una fracción sea 0, el numerador ha de ser 0$\Rightarrow 0=x+3 \Rightarrow x=-3$. Con esto también sabemos que la función pasa por el punto (-3,0)

b) Razona si los puntos $P(1,-4)$ y $Q(2,1)$ pertenecen a la gráfica de f .

Si el punto pertenece a la función ha de verificar su fórmula, veamos si estos puntos lo cumplen:

$P(1,-4)$ es de la gráfica si $f(1)=-4$. Calculamos: $f(1)=\dfrac{1+3}{1^2-2}=\dfrac{4}{-1}=-4$ que como vemos se cumple. Luego el punto $P(1,-4)$ está en la gráfica.

$Q(2,1)$ es de la gráfica si $f(2)=1$. Calculamos: $f(2)=\dfrac{2+3}{2^2-2}=\dfrac{5}{2}\neq 1$ que como vemos se cumple. Luego el punto $Q(2,1)$ no pertenece a la gráfica.

c) Sus puntos de corte con los ejes

<u>Cortes con el eje OX o eje de abscisas</u>: En los puntos del eje OX la coordenada y ha de valer 0 $(y=0)$. O lo que es lo mismo como $y=f(x)$, tenemos $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-2}=0$, ahora resolvemos: $\dfrac{x+3}{x^2-2}=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$.
Así, el punto de corte con el eje OX es: (-3,0)
<u>Corte con el eje OY o eje de ordenadas</u>: En los puntos del eje OY, la coordenada x ha de valer 0 $(x=0)$. Lo mismo que antes, pero sustituimos x por 0 y calculamos la y: $y=\dfrac{0+3}{0^2-2}=\dfrac{-3}{2}$.
El punto de corte con el eje OY es: $\left(0,\dfrac{-3}{2}\right)$

<u>Clasificación de las funciones según su criterio o fórmula</u>

- *Funciones*
  - Algebraicas
    - *Racionales*
      - *Polinómicas*
        - Constantes $\rightarrow$ Ej: $f(x)=-6$
        - Afines y lineales $\rightarrow$ Ej: $f(x)=2x-4$
        - Cuadráticas $\rightarrow$ Ej: $f(x)=3x^2+x-5$
        - De grado superior a 2 $\rightarrow$ Ej: $f(x)=x^3-x^2$
      - *Fraccionarias*: Su criterio o fórmula es una fracción con x en el denominador $\rightarrow$ Ej: $f(x)=\dfrac{2}{x+5}$
    - *Irracionales*: Son aquellas funciones donde la variable independiente, x, aparece dentro de un signo radical $\rightarrow$ Ej: $f(x)=\sqrt{2x+3}$
  - *Trascendentes*
    - *Trigonométricas*: Aparece alguna función *trigonométrica*
      Ej: $f(x)=sen(x)+\cos(x)+6$
    - *Exponenciales*: La variable "x" está en el exponente
      Ej: $f(x)=5^{-3x}$
    - *Logarítmicas*: Aparece la "x" como argumento de algún logaritmo
      Ej: $f(x)=-4x+\ln(x)$

CÁLCULO DE DOMINIOS MEDIANTE LA FÓRMULA O CRITERIO

Dependiendo del criterio o fórmula de la función actuaremos de una forma u otra para calcular el dominio, atendiendo a las siguientes instrucciones, basadas en que no se puede dividir por 0, no se pueden obtener raíces de índice par de radicandos negativos:

- *Funciones polinómicas*: Su dominio es todo R, pues al ser el criterio un polinomio nunca habrá problemas.
  Ejemplos:

  a) $f(x) = x^4 - x^2$ b) $y = -x^2 + 1$ c) $y = -1$

  $Dom(f) = \mathbb{R}$ $Dom(f) = \mathbb{R}$ $Dom(f) = \mathbb{R}$

- *Funciones fraccionarias*: Son de la forma $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.
  Su dominio está formado por todos aquellos nº reales que no anulan el denominador. Matemáticamente lo expresamos de la siguiente manera: $Dom(y) = \{x \in R / \mathrm{Q(x)} \neq 0\}$ (esto se lee así, "todos los nº reales tales que el polinomio denominador $Q(x)$ no vale 0"

  Ejemplos:

  a) $y = \dfrac{1}{x}$. Tenemos que $Dom(y) = \mathbb{R} - \{0\}$

  b) $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2 - 3x}$ Vamos a calcular su dominio, $Dom(f) = \{x \in R \setminus x^2 - 3x \neq 0\}$

  Vemos dónde se anula el denominador: $x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{array}{c} x=0 \\ x=3 \end{array}$ Por tanto, $Dom(y) = \mathbb{R} - \{0,3\}$

- *Funciones irracionales*: Son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$
  - Si el índice del radical es impar (n es impar), entonces el dominio de la función f coincide con el dominio de la función g
  - Si el índice del radical es par (n es par), entonces el dominio será el conjunto de los nº reales tales que $g(x) \geq 0$

  Ejemplos:

  a) Calcular el dominio de $y = \sqrt[3]{2x-1}$. Como se trata de una función irracional de índice impar (3), nos fijamos en el radicando, y como se trata de una polinómica de primer grado (afín) su dominio será R

  $Dom(y) = \mathbb{R}$

  b) Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{2}{x^2 - 9}}$ Por ser de índice impar (5), nos fijamos en el radicando, que es una fracción algebraica. Debemos descartar para el dominio los valores que anulan el denominador

$$x^2-9=0 \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ x=-3 \end{matrix} \rightarrow Dom(y)=\mathbb{R}-\{3,-3\}$$

c) Calcular el dominio de $f(x)=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-9}}$ Por ser de índice par, vamos a hacer una tabla de signos para conocer donde el radicando es ≥ 0. Veamos primero donde el numerador y el denominador del radicando se anulan.

$$\begin{matrix} x-1=0 \\ x^2-9=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=3 \\ x=-3 \end{matrix}$$ Con estos tres valores dividimos la recta real en 4 intervalos abiertos y construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-3)$	(-3,1)	(1,3)	$(3,+\infty)$
x-1	-	-	+	+
x^2-9	+	-	-	+
	-	**+**	**-**	**+**

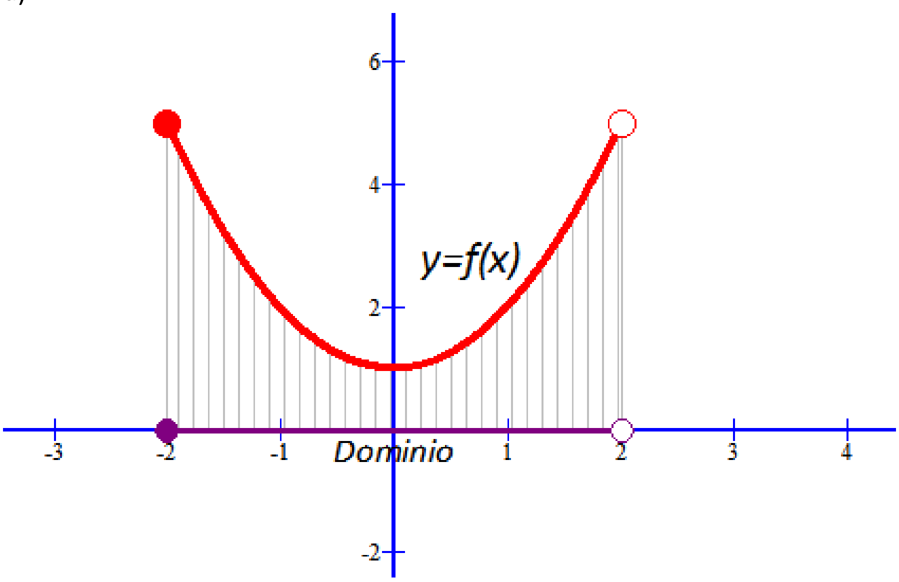
De donde deducimos que $Dom(f)=(-3,1]\cup(3,+\infty)$. Fijaos que el 1 es cerrado pues anula el numerador del radicando y tiene sentido (tendríamos una raíz cuarta de 0, que es 0), mientras que –3 y 3 van abiertos pues anulan el denominador y no tienen sentido (dividiríamos por 0).

<u>CÁLCULO DE DOMINIOS MEDIANTE LA GRÁFICA</u>

El dominio de la función viene dado por el conjunto de valores del eje de abscisas o eje OX para los cuales la función existe. Veamos unos ejemplos:

<u>Ejemplo</u>: Calcular el dominio de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

a)

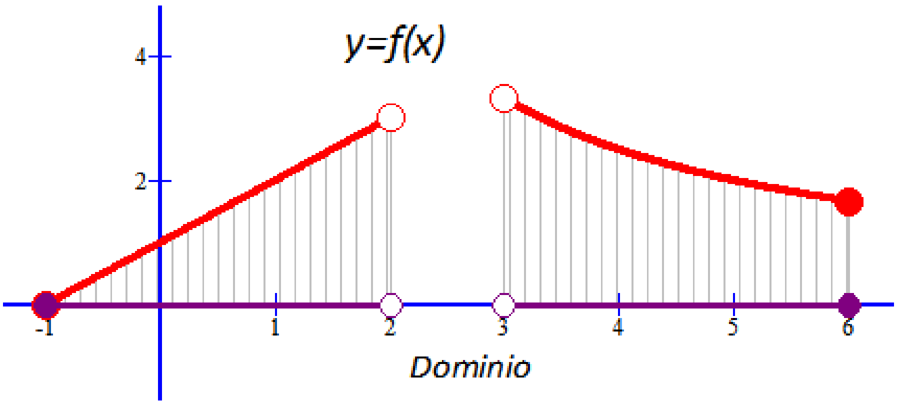


El dominio de esta función es la parte del eje OX que tienen correspondientes valores de la gráfica (existe f(x)).

Por tanto,

$$Dom(f)=[-2,2)$$

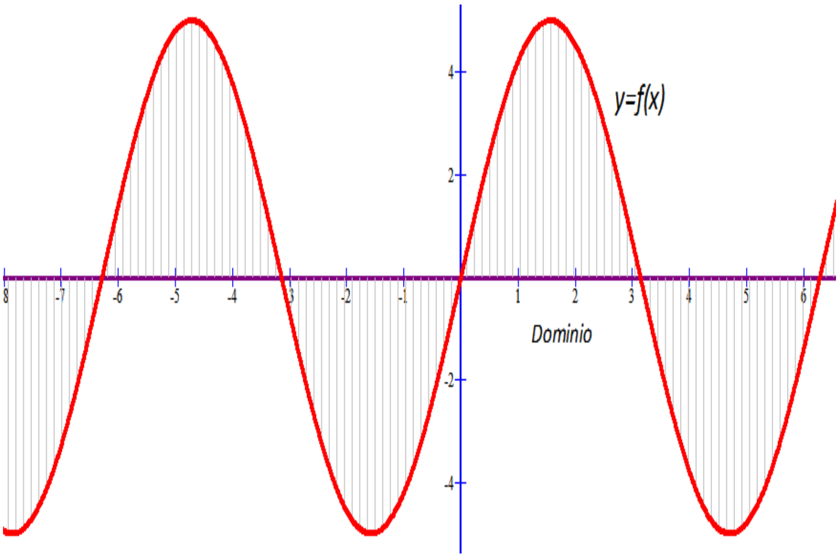
b)



En este caso tenemos que:

$$Dom(f) = [-1,2) \cup (3,6]$$

c)



En este caso tenemos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

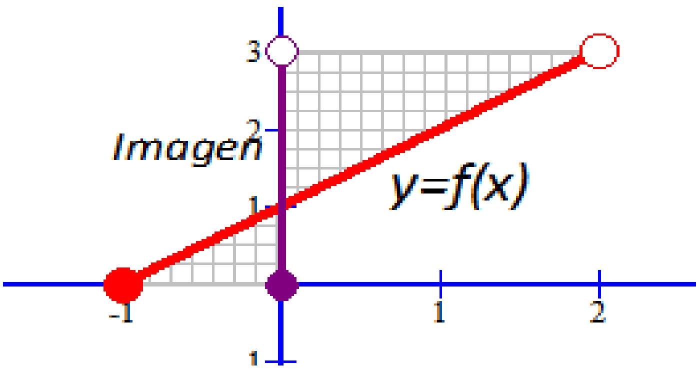
<u>CÁLCULO DE LA IMAGEN O RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE LA GRÁFICA</u>

Sólo calcularemos imágenes o recorridos de funciones mediante gráficas.

El recorrido de una función viene dado por el conjunto de valores del eje de ordenadas o eje OY que son alcanzados por la función.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el recorrido de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

a)

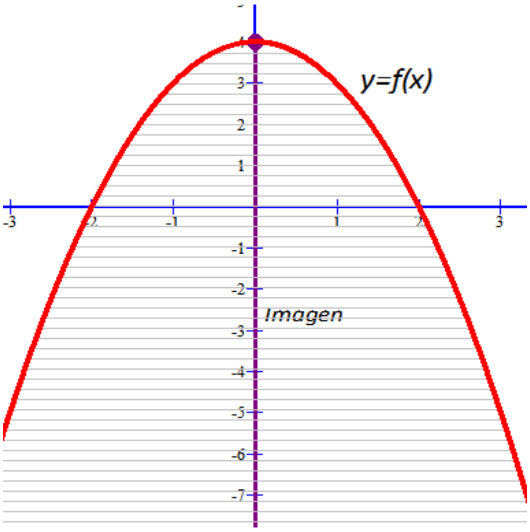


El recorrido de esta función es la parte del eje OY que tienen correspondientes valores de la gráfica (existe f(x)).

Por tanto,

$$\operatorname{Re}corr(f) = [0,3)$$

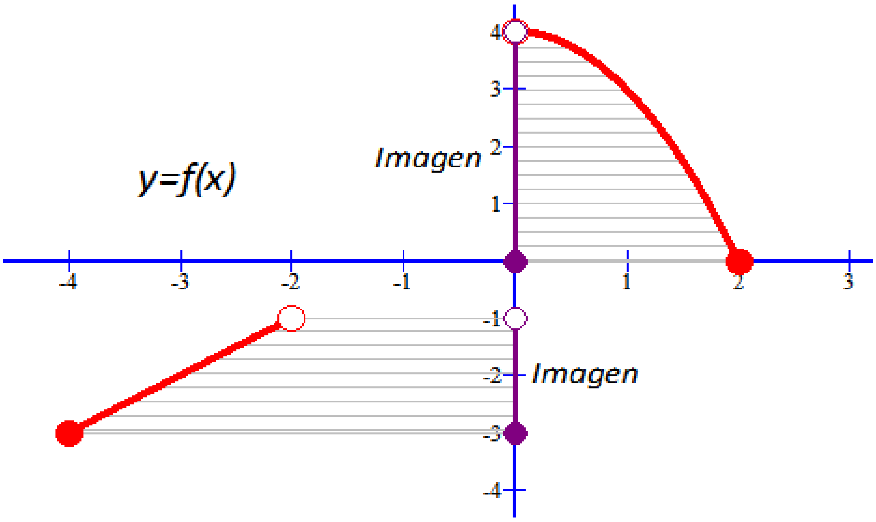
b)



En este caso tenemos que:

$$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 4]$$

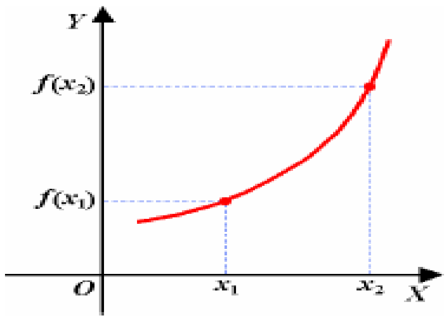
c)

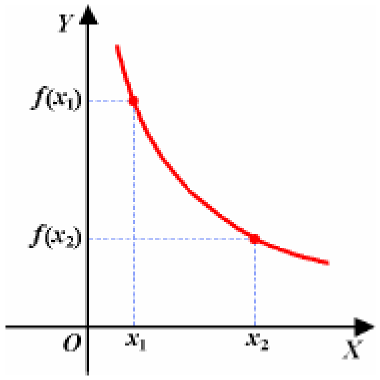


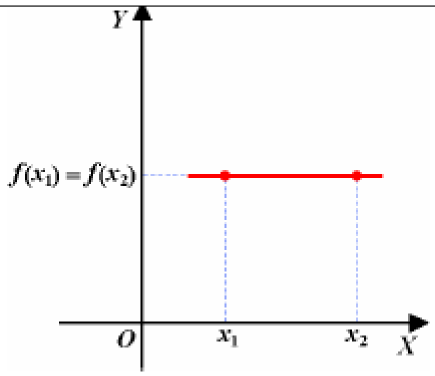
En este caso tenemos que:

$$\mathrm{Im}(f) = [-3, -1) \cup [0, 4)$$

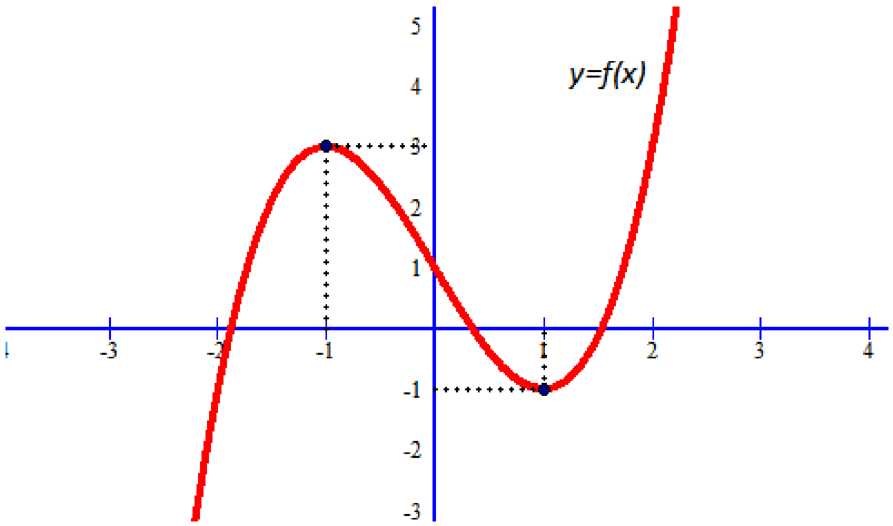
4. MONOTONÍA. EXTREMOS RELATIVOS

Una función $y = f(x)$ es **<u>creciente</u>** cuando al aumentar la variable independiente aumenta también la variable dependiente, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$	

Una función $y = f(x)$ es **<u>decreciente</u>** cuando al aumentar la variable independiente disminuye la variable dependiente, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$	 *Función decreciente* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Una función $y = f(x)$ es **<u>constante</u>** cuando al aumentar la variable independiente, la variable dependiente no varía, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) = f(x_2)$	 *Función constante* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

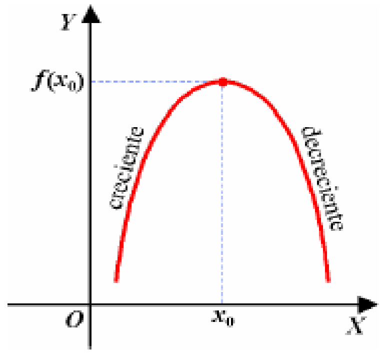
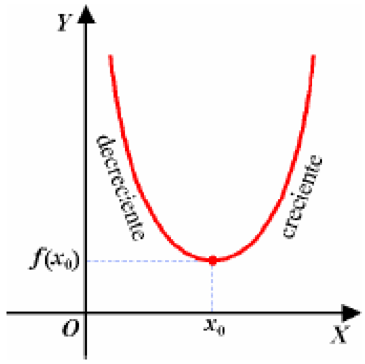
<u>Ejemplo</u>: Tenemos la función $y = f(x)$ cuta gráfica es la siguiente:



Observamos que la función es creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(1,+\infty)$

Y que la función es decreciente en $(-1,1)$

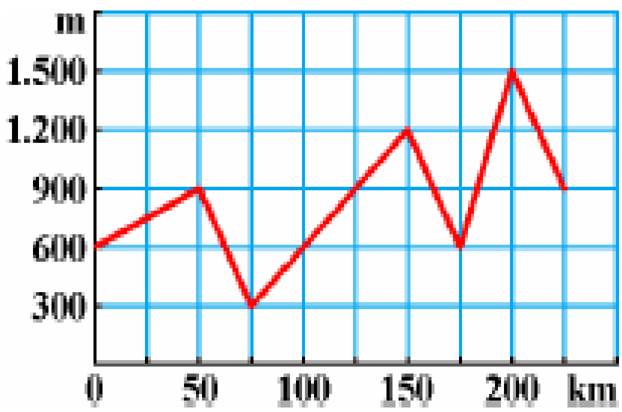
EXTREMOS RELATIVOS. MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

Una función $y = f(x)$ tiene un **máximo relativo** en un punto $x = x_0$ si, en valores próximos a él, a la izquierda de ese punto la función es creciente y a la derecha de ese punto la función es decreciente; esto es, si los valores próximos a él que toma la función son menores.	 *Máximo en $x = x_0$* El punto x_0 tiene mayor ordenada, $f(x_0)$, que los demás
Una función $y = f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en un punto $x = x_0$ si, en valores próximos a él, a la izquierda de ese punto la función es decreciente y a la derecha de ese punto la función es creciente; esto es, si los valores próximos a él que toma la función son mayores.	 *Mínimo en $x = x_0$* El punto x_0 tiene menor ordenada, $f(x_0)$, que los demás

No obstante, una función puede presentar varios máximos y mínimos. Para distinguirlos, definimos los siguientes conceptos asociados.

- Una función $y = f(x)$ tiene un máximo (mínimo) **absoluto** en un punto $x = x_0$ si los valores que toma la función son todos menores (mayores) que su imagen $f(x_0)$.
- Una función $y = f(x)$ tiene un máximo (mínimo) **relativo** en un punto $x = x_0$ si los valores próximos a él que toma la función son todos menores (mayores) que su imagen $f(x_0)$.

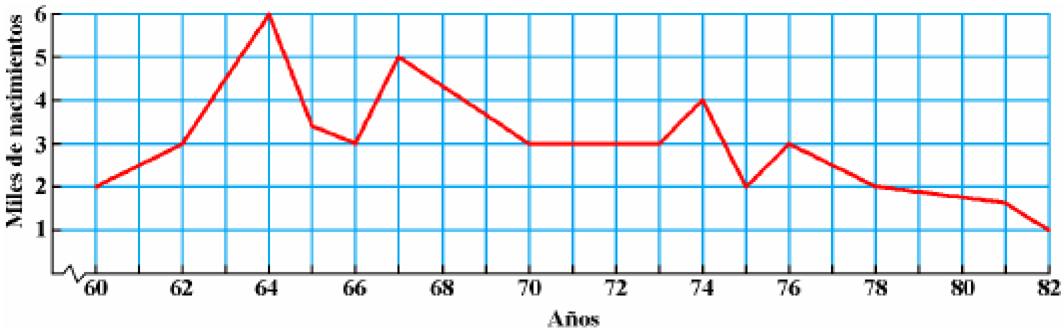
Ejemplo: A partir de la siguiente gráfica (muestra el perfil de una etapa de la Vuelta Ciclista a España) estudia el crecimiento y decrecimiento de la función y los máximos y mínimos.



- La función es creciente en los intervalos (0, 50), (75, 150) y (175, 200).
- La función es decreciente en los intervalos (50, 75), (150, 175) y (200, 225).
- Presenta un máximo absoluto en x = 200 (1.500 m es la altitud máxima) y un mínimo absoluto en x = 75 (300 m es la altitud mínima).
- Los máximos relativos los alcanza en los puntos x = 50 (900 m de altitud) y x = 150 (1.200 m de altitud).

- Los mínimos relativos los alcanza en los puntos x = 0 (600 m de altitud), x = 175 (600 m de altitud) y x = 225 (900 m de altitud).

<u>Ejemplo</u>: La gráfica siguiente expresa la evolución del número de nacimientos en una ciudad de España.



a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del índice de natalidad.

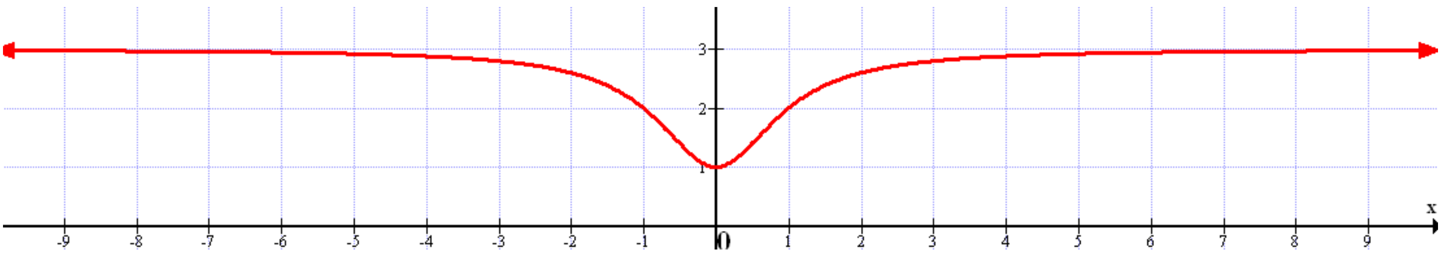
El número de nacimientos crece en los intervalos: (60,64), (66,67), (73,74) y (75,76)
El número de nacimientos decrece en los intervalos: (64,66), (67,70), (74,75) y (76,82)

b) ¿En qué período de tiempo permanece constante la natalidad?

En el intervalo (70,73)

c) ¿En qué años se ha conseguido el mayor número de nacimientos? Indica los máximos y mínimos de esta función.

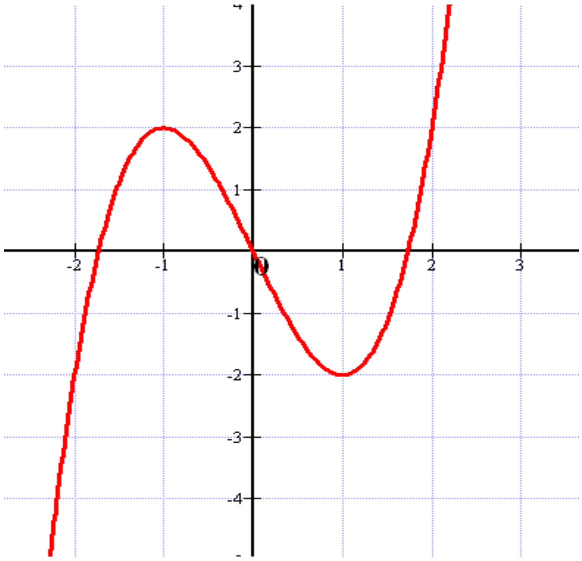
El mayor nº de nacimientos se produce en el año 64 (máximo absoluto) y en los años 67, 74 y 76 tiene máximos relativos. También se puede decir mediante puntos: (64,6) es máximo absoluto y (67,5), (74,4) y (76,3) son máximos relativos.
En cuanto a los mínimos podemos decir que: en (82,1) hay un mínimo absoluto y en (60,2), (66,3), (75,2) son mínimos relativos.
<u>Ejemplo</u>: Supongamos que tenemos una función cuya gráfica es como sigue:



Viendo el dibujo podemos decir que:

- En $(-\infty,0)$, la función es estrictamente decreciente (se puede decir decreciente)
- En $(0,+\infty)$, la función es estrictamente creciente(se puede decir creciente)
- En $x_0 = 0$ (ó mejor dicho en el punto (0,1)) , la función presenta un mínimo relativo que es absoluto
- No tiene máximos relativos
- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- Su imagen es $[1,3)$

Ejemplo: Lo mismo para



- f es creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(1,+\infty)$
- f es decreciente en $(-1,1)$
- f tiene un máx. relativo en $x_0 = -1$. También se puede decir que tiene un máximo relativo en (-1,2). No tiene máximos absolutos.
- f tiene un mín. relativo en $x_0 = 1$. También se puede decir que tiene un máximo relativo en (1,-2). No tiene mínimos absolutos.
- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- Su imagen es todo $\mathbb{R}$

5. FUNCIONES ACOTADAS. EXTREMOS ABSOLUTOS

Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada superiormente por un nº real K si todos los valores que toma la función son menores o iguales que K, es decir, $f(x) \leq K \quad \forall x \in Dom(f)$ (NOTA: $\forall$ = para todo)

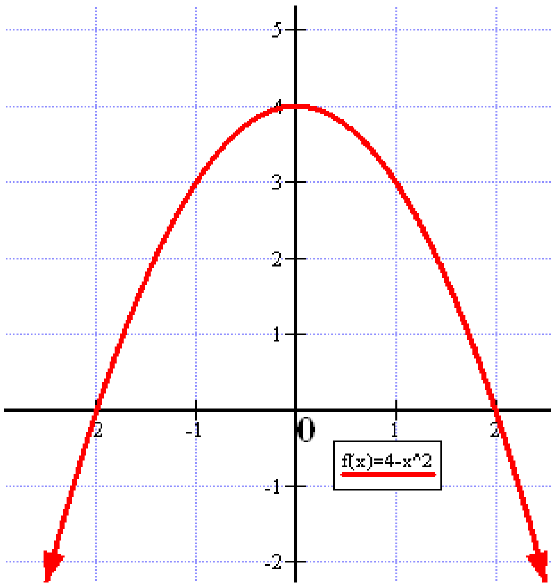
A K se le llama cota superior.

Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada inferiormente por un nº real P si todos los valores que toma la función son mayores o iguales que K, es decir, $f(x) \geq P \quad \forall x \in Dom(f)$

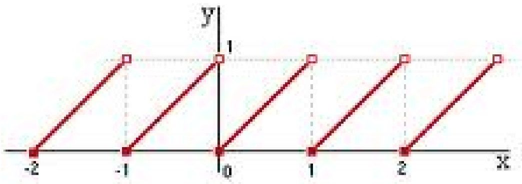
A P se le llama cota inferior

Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada si lo está superior e inferiormente, es decir, $P \leq f(x) \leq K$ $\forall x \in Dom(f)$

Ejemplo: La función $f(x) = 4 - x^2$ está acotada superiormente por 4 (ó 5 ó 6 ó ...) pero no está acotada inferiormente



<u>Ejemplo</u>: La función de la gráfica está acotada. Por ejemplo, tiene como cota superior 1 (o cualquier otro nº mayor que 1) y como una cota inferior 0 (o cualquier otro nº menor que 0)



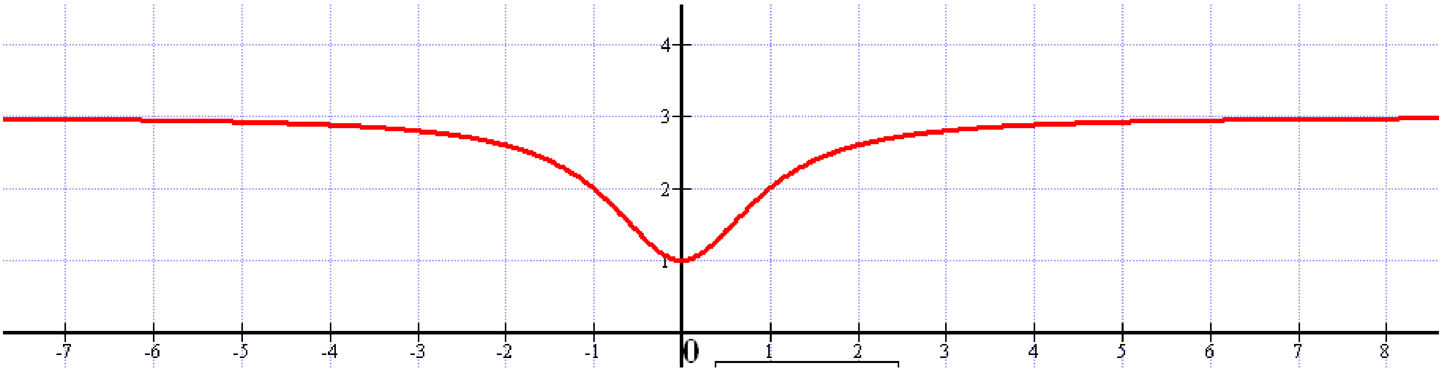
<u>*Definición*</u>: Se llama **extremo superior o supremo** a la menor de las cotas superiores de una función acotada superiormente

<u>*Definición*</u>: Se llama **máximo absoluto** de una función acotada superiormente al extremo superior o supremo cuando es alcanzado por la función

<u>*Definición*</u>: Se llama **extremo inferior o ínfimo** a la mayor de las cotas inferiores de una función acotada inferiormente

<u>*Definición*</u>: Se llama **mínimo absoluto** de una función acotada inferiormente al extremo inferior o ínfimo cuando es alcanzado por la función

<u>Ejemplo</u>: Dada la siguiente gráfica



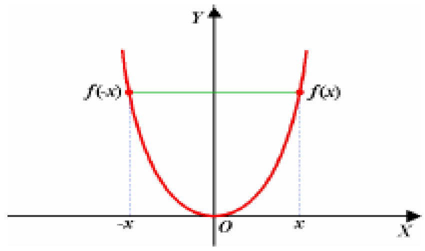
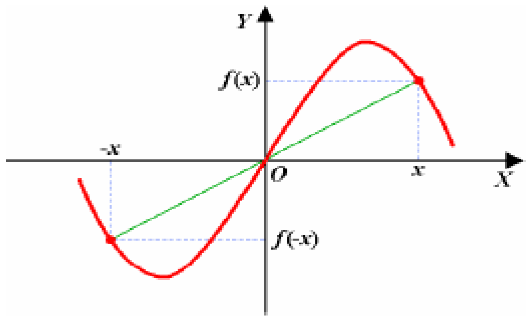
Podemos observar que es una función acotada.

La menor de las cotas superiores es 3 (3 es el extremo superior o supremo) pero la función no lo alcanza, luego no tiene máximo absoluto

La mayor de las cotas inferiores es 1 (1 es el extremo inferior o ínfimo) y además lo alcanza es el mínimo absoluto. Del mínimo absoluto podemos decir que es el punto (0,1), que lo alcanza en x = 0 o bien que es 1. Nosotros habitualmente usaremos las dos primeras expresiones.

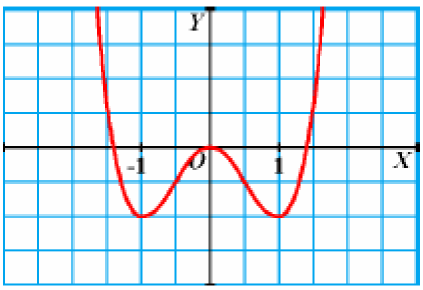
6. FUNCIONES SIMÉTRICAS Y PERIÓDICAS

Las gráficas de las funciones son figuras geométricas, por lo que pueden ser simétricas respecto de un eje o de un punto. Vamos a considerar dos tipos de simetrías:

<u>SIMETRÍA PAR</u>: Una función $y=f(x)$ es <u>simétrica respecto del eje de ordenadas</u>, o se dice que tiene <u>simetría par</u>, si para cualquier valor x se verifica que $f(-x)=f(x)$.	 *Simetría respecto del eje de ordenadas*
<u>SIMETRÍA IMPAR</u>: Una función $y=f(x)$ es <u>simétrica respecto del origen de coordenadas</u>, o se dice que tiene <u>simetría impar</u>, si para cualquier valor x se verifica que $f(-x)=-f(x)$.	 *Simetría respecto del origen de coordenadas*

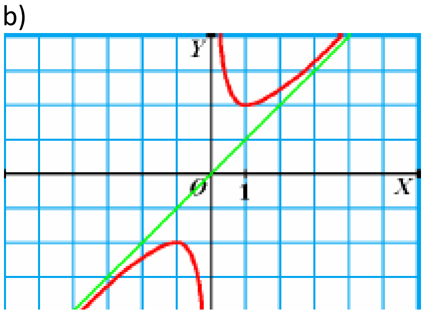
<u>Ejemplo</u>: Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a)



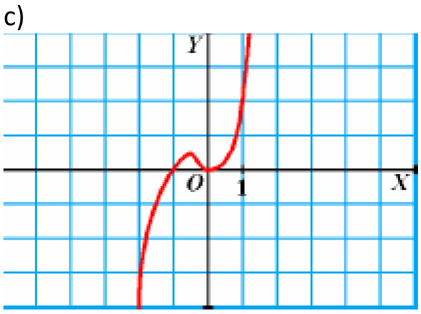
Simetría par

b)



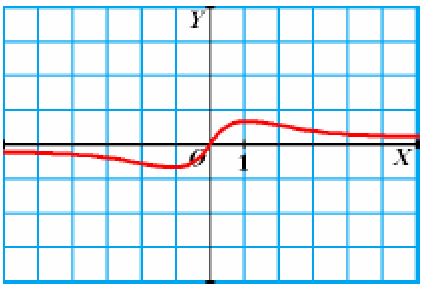
Simetría impar

c)



No tiene simetría

d)



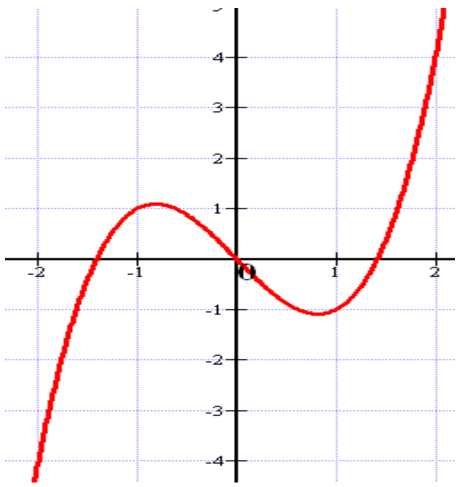
Simetría impar

Ejemplo:

La función $f(x)=x^3-2x$ es impar como vemos por su representación gráfica.

Matemáticamente demostramos que es impar haciendo lo siguiente:

$$f(-x)=(-x)^3-2\cdot(-x)=-x^3+2x=-(x^3-2x)=-f(x)$$

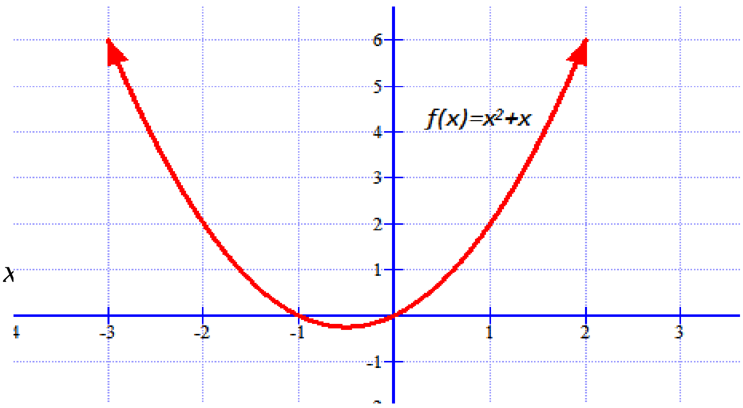


Ejemplo:

La función $f(x)=x^2+x$ no tiene simetría, no es par ni impar.

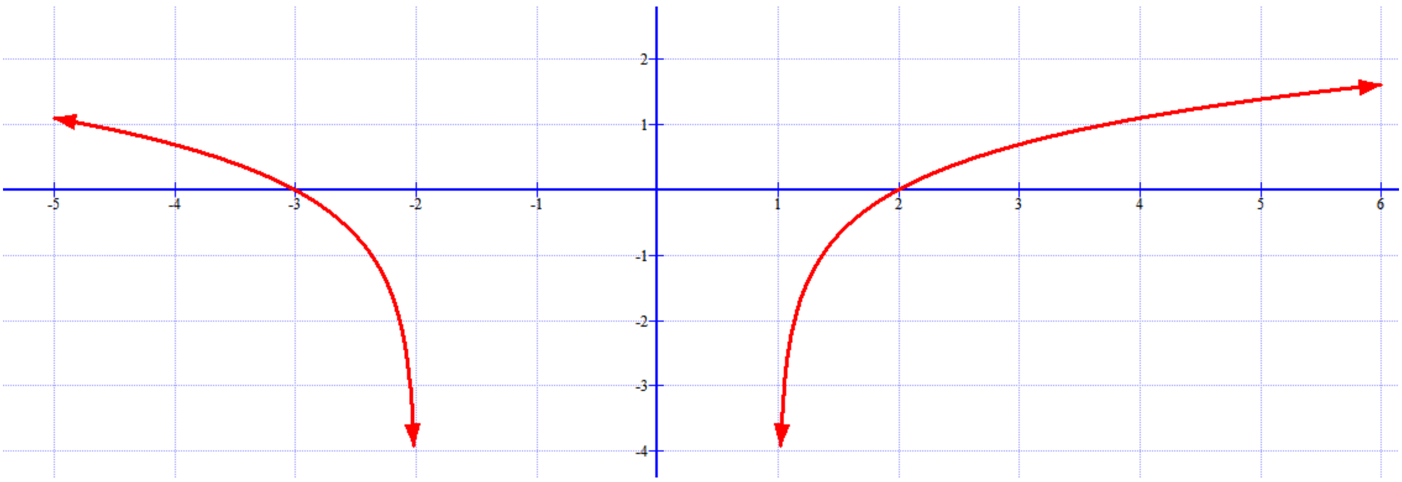
Matemáticamente lo demostramos pues:

$$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x\neq\begin{cases} f(x)=x^2+x \\ -f(x)=-x^2-x\end{cases}$$

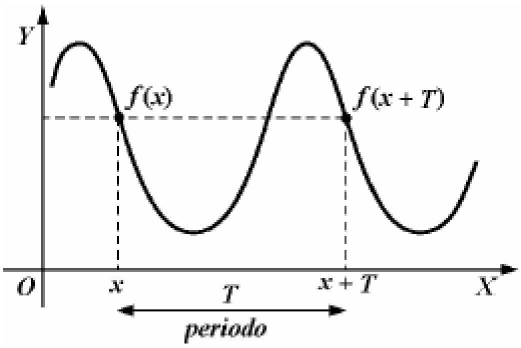


Propiedad: Para que una función pueda ser simétrica (par o impar) su dominio ha de ser simétrico respecto al origen de coordenadas

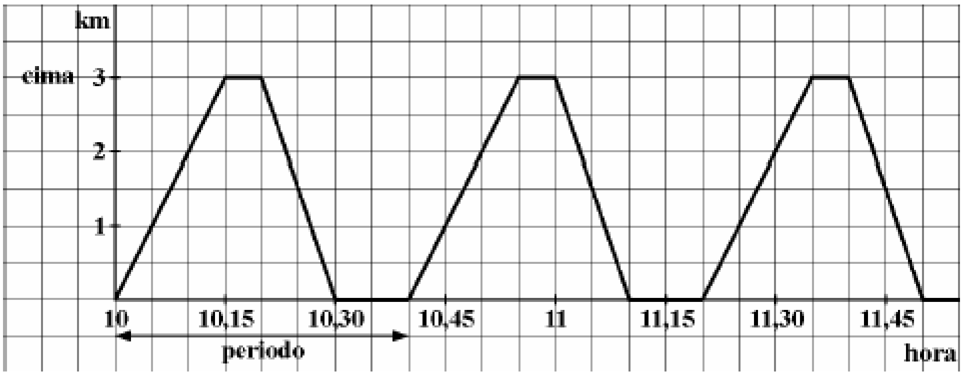
Ejemplo: La función dada por la gráfica siguiente no es simétrica pues su dominio es $Dom(f)=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$



<u>Definición</u>: Una función es <u>periódica</u> cuando los valores que toma se repiten cada cierto intervalo fijo T , que se llama <u>periodo</u>. Esto es, si: $f(x+T) = f(x)$



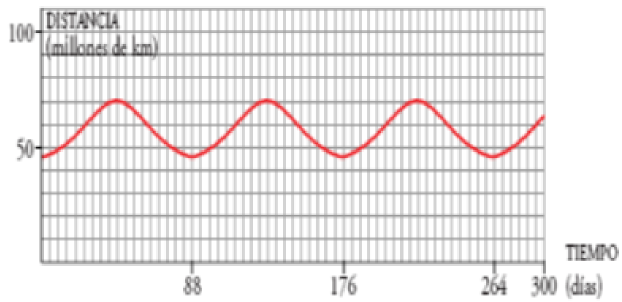
<u>Ejemplo</u>: Un tren de montaña hace un recorrido desde la base hasta la cima, se detiene arriba y a continuación desciende, volviendo a repetir nuevamente el viaje en las mismas condiciones. La siguiente gráfica muestra la altitud a la que se encuentra el tren durante una parte del día:



Observa que los valores que toma esta función se repiten cada cierto intervalo de tiempo (40 minutos).
Luego su periodo es $T = 40$

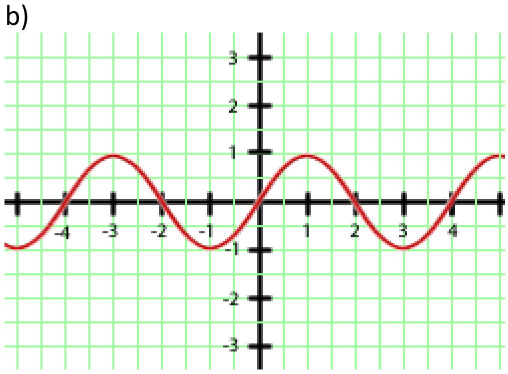
<u>Ejemplo</u>: Estudia la periodicidad de las siguientes funciones:

a)



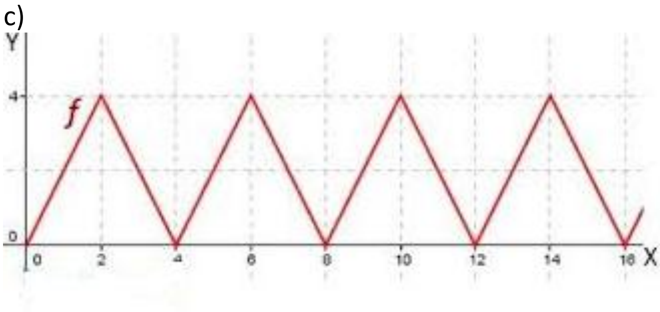
Periódica de periodo 88 días

b)



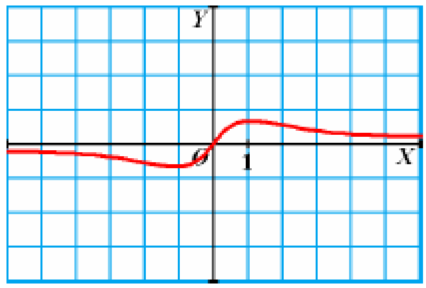
Periódica de periodo 4

c)



Periódica de periodo 4

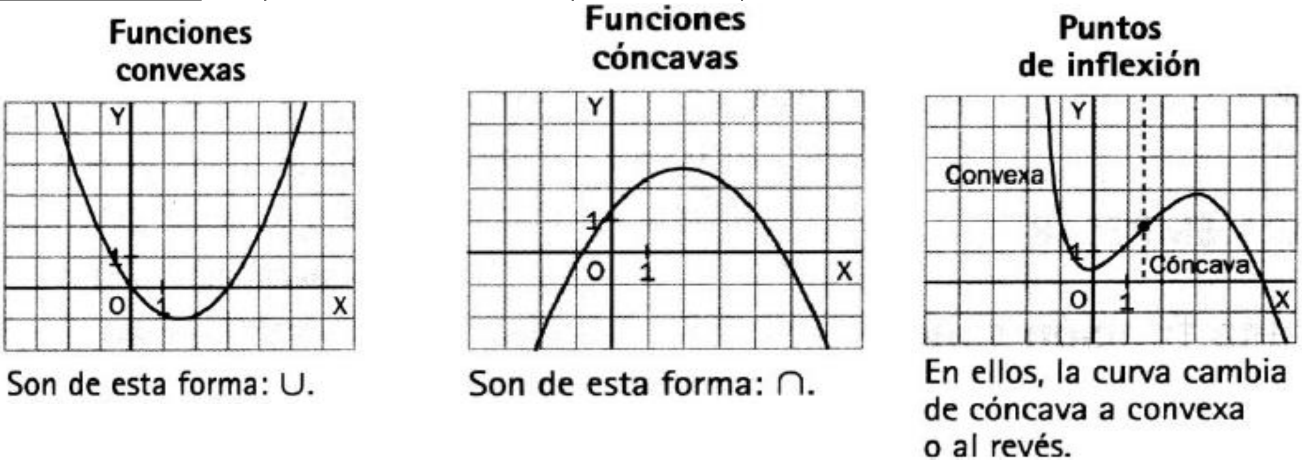
d)



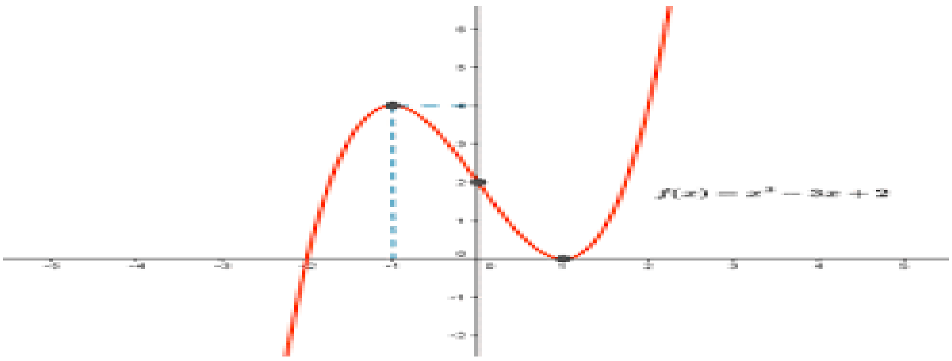
No es periódica

7. CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

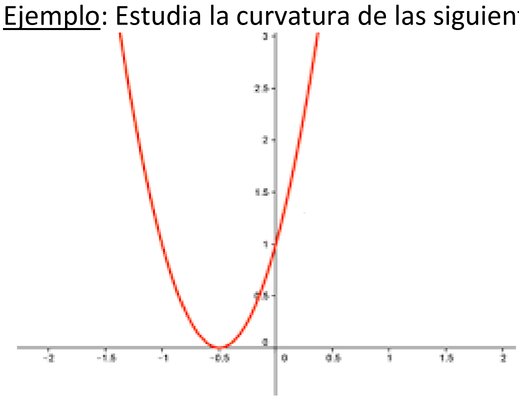
Función convexa: Una función es convexa en un intervalo si, al unir dos puntos cualesquiera del intervalo, el segmento queda por encima de la gráfica de la función.
Función cóncava: Una función es cóncava en un intervalo si, al unir dos puntos cualesquiera del intervalo, el segmento queda por debajo de la gráfica de la función.
Puntos de inflexión: Los puntos de inflexión son aquellos en los que la función cambia de curvatura.



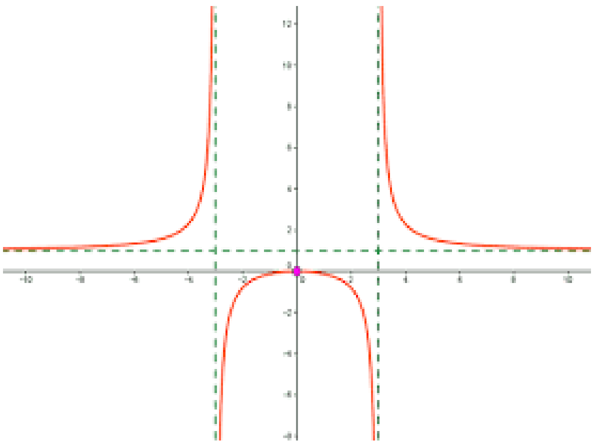
Estudiar la curvatura de una función es decir dónde es convexa, cóncava y, si tiene, sus puntos de inflexión.
Ejemplo: Estudia la curvatura de la siguiente función:



La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 0)$. La función es convexa en el intervalo $(0, +\infty)$
En el punto $(0, 2)$ tiene un punto de inflexión
Ejemplo: Estudia la curvatura de las siguientes funciones:



La función es convexa en todo su dominio que es $\mathbb{R}$. No tiene puntos de inflexión.



La función es convexa en $(-\infty, -3)$ y en $(3, +\infty)$
La función es cóncava en $(-3, 3)$
No tiene puntos de inflexión

8. ASÍNTOTAS.RAMAS INFINITAS

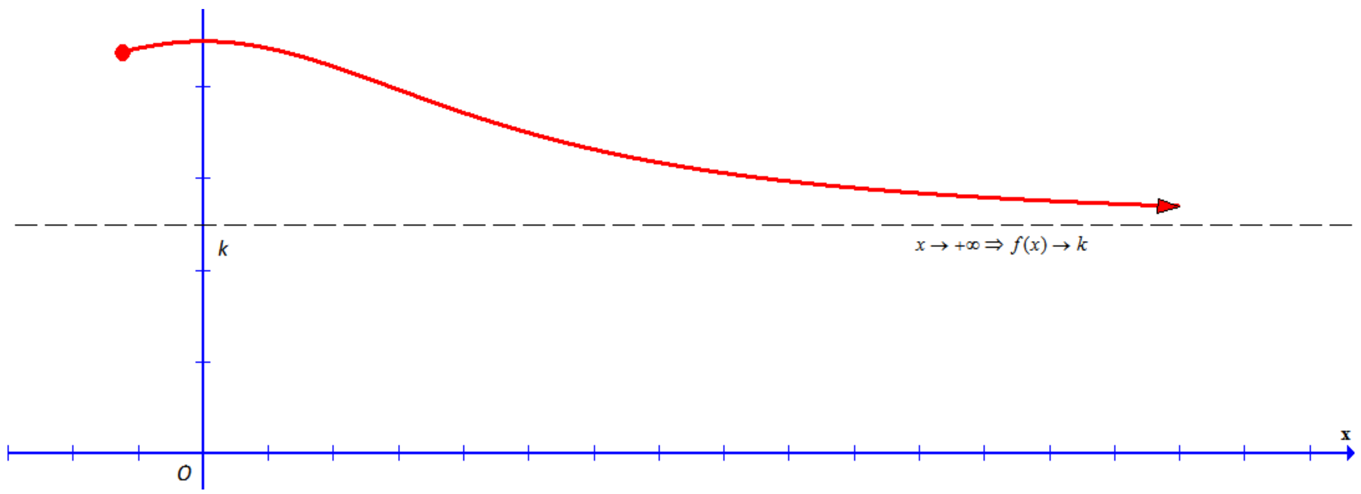
TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN HACIA UN VALOR CONSTANTE CUANDO x TIENDE A $\pm\infty$

Una función **tiende hacia un valor constante *k*** cuando al aumentar o disminuir los valores de la variable independiente "x", los correspondientes valores de la variable dependiente "y" se van aproximando al valor constante k.

Este comportamiento se expresa de las siguientes formas:

- Cuando x tiende a más infinito, $y = f(x)$ tiende a *k*. Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to k$

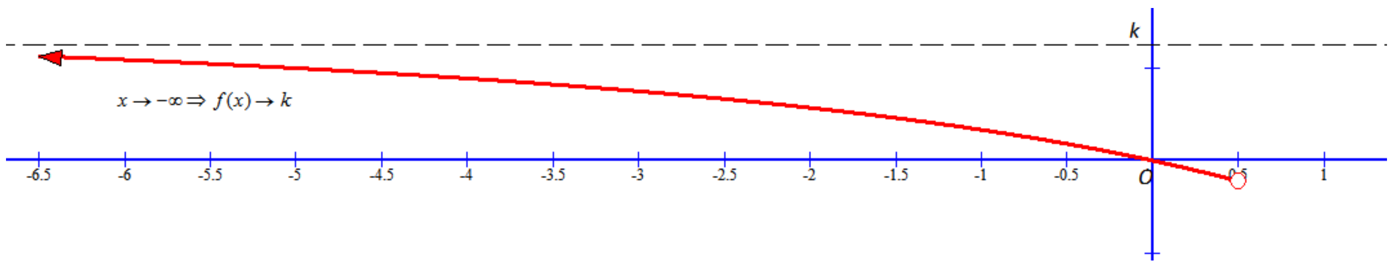
  Gráficamente sería de esta manera:



Diremos que la recta $y = k$ es una ***asíntota horizontal*** en $+\infty$ de la función $y = f(x)$

- Cuando x tiende a menos infinito, $y = f(x)$ tiende a *k*. Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to k$

  Gráficamente sería de esta manera:



Diremos que la recta $y = k$ es una ***asíntota horizontal*** en $-\infty$ de la función $y = f(x)$

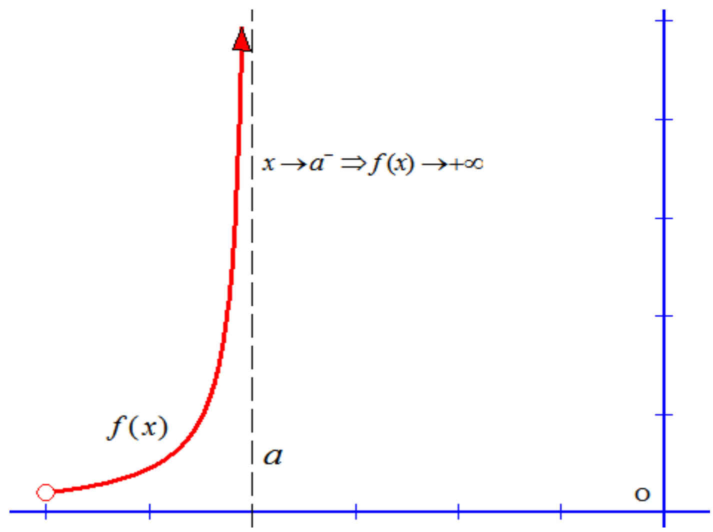
TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN HACIA $\pm\infty$ CUANDO x TIENDE A UN VALOR CONSTANTE

En la tendencia de una función a más o menos infinito cuando *x* tiende a un valor constante a pueden darse los siguientes casos:

- Si *x* tiende a "a" por la izquierda y entonces $f(x)$ tiende a más infinito. Matemáticamente lo expresamos así: $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$

  Gráficamente sería de esta manera:

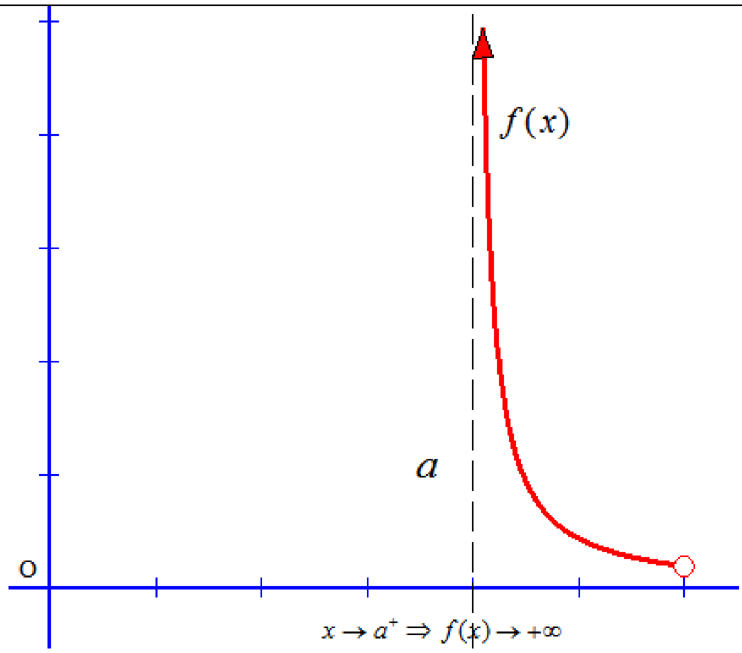
Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la izquierda de la función $y = f(x)$ hacia $+\infty$



- Si *x* tiende a "a" por la derecha y entonces $f(x)$ tiende a más infinito. Matemáticamente lo expresamos así: $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$

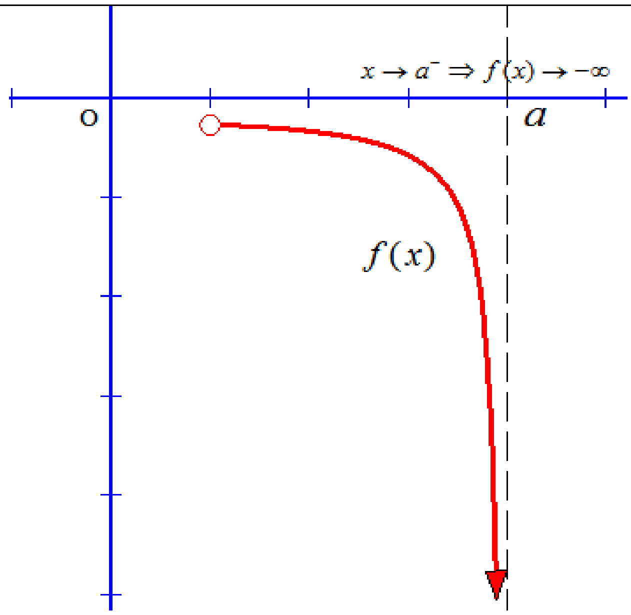
  Gráficamente sería de esta manera:

Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la derecha de la función $y = f(x)$ hacia $+\infty$



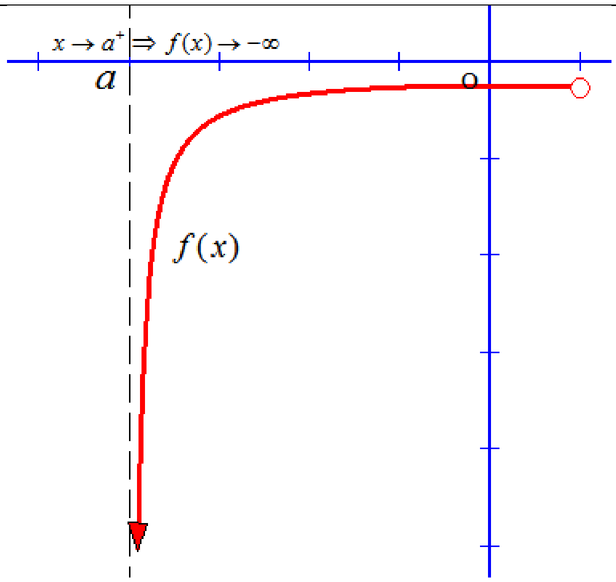
- Si *x* tiende a "*a*" por la izquierda y entonces $f(x)$ tiende a menos infinito.
  Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$

  Gráficamente sería de esta manera:



Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la izquierda de la función $y = f(x)$ hacia $-\infty$

- Si *x* tiende a "*a*" por la derecha y entonces $f(x)$ tiende a menos infinito.
  Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$
  Gráficamente sería de esta manera:



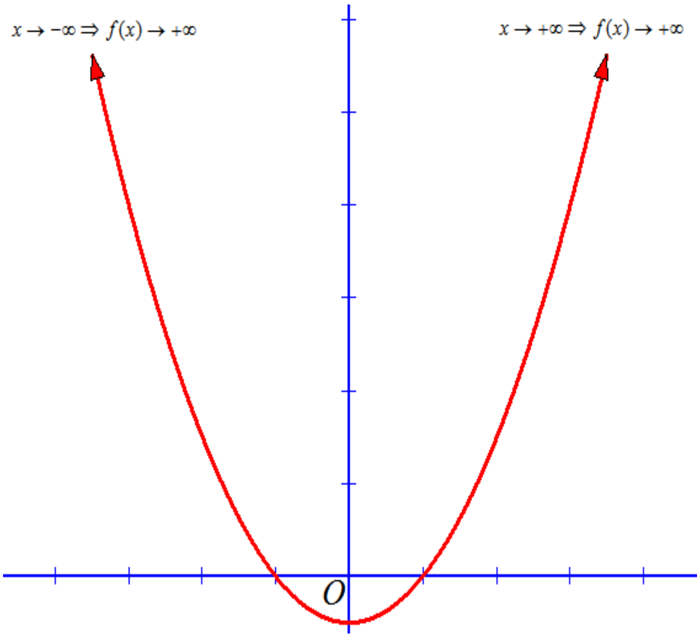
Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la derecha de la función $y = f(x)$ hacia $-\infty$

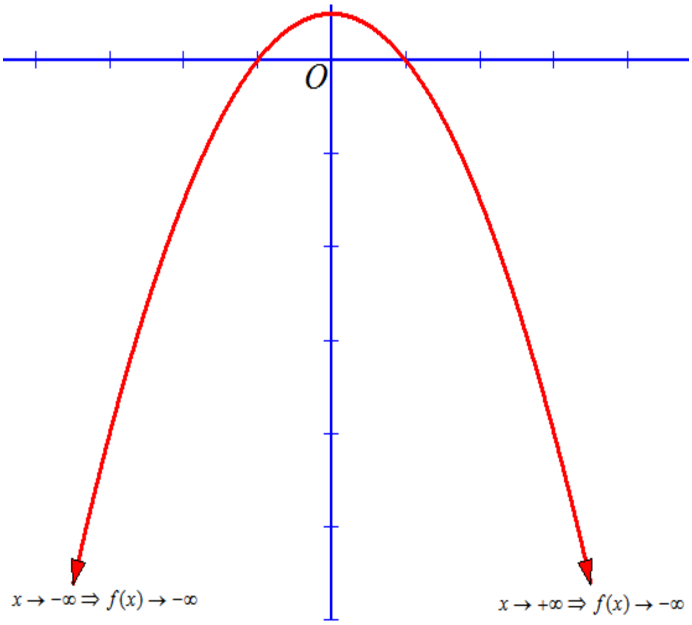
TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN HACIA $\pm\infty$ CUANDO x TIENDE A $\pm\infty$
Una función tiende a más o menos infinito cuando *x* tiende a más o menos infinito cuando a al hacerse la variable independiente "*x*" muy grande, en valor absoluto, también se hace muy grande la variable dependiente "*y*", en valor absoluto. En estos casos, se dice que la función no tiene un comporta miento asintótico.

Tenemos cuatro casos que los representamos matemáticamente como sigue:

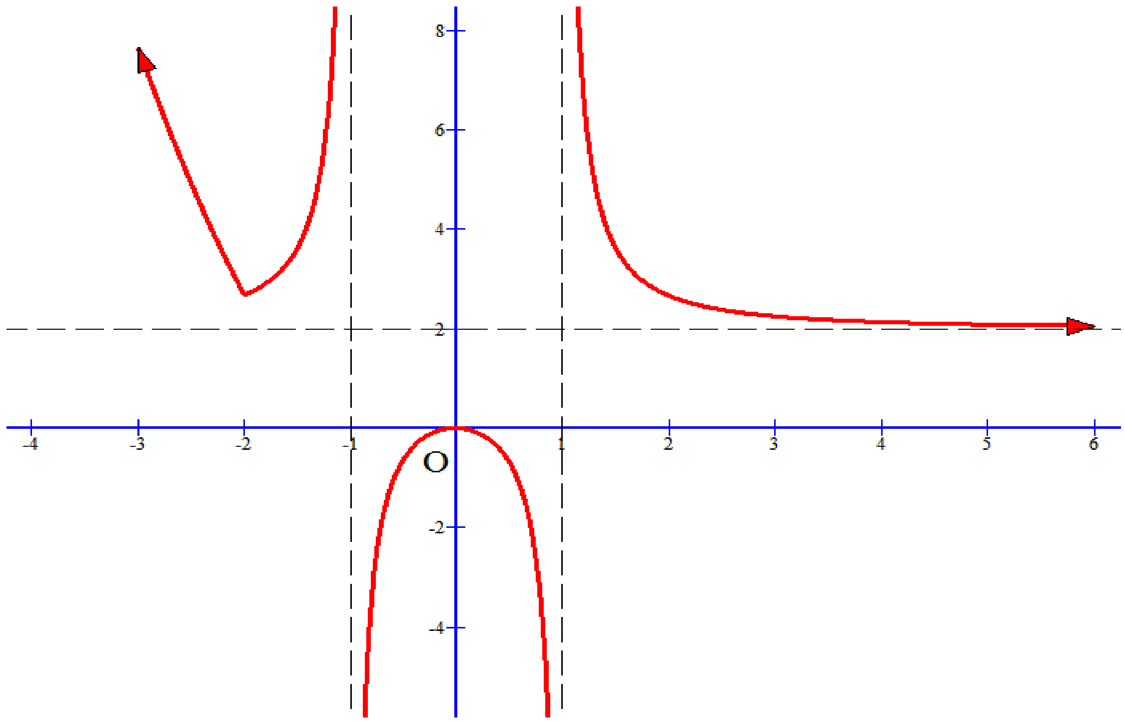
- $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$
- $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

Gráficamente sería así:





__Ejemplo__: Determinar el comportamiento tendencial o asintótico de la función $y = f(x)$ cuya gráfica es la dada:



Vamos a ir recorriendo la gráfica de izquierda ($-\infty$) a derecha ($+\infty$)

- En $-\infty$, la función se va a $+\infty$, y no tiene asíntota, es decir, $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -1^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la izquierda hacia $+\infty$ que es la recta $x = -1$
- Si $x \to -1^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la derecha hacia $-\infty$ que es la recta $x = -1$
- Si $x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la izquierda hacia $-\infty$ que es la recta $x = 1$

- Si $x \to 1^{+} \Rightarrow f(x) \to +\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la derecha hacia $+\infty$ que es la recta $x = 1$
- En $+\infty$, la función se aproxima a 2, es decir, $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 2$. Por tanto, la función tiene una asíntota horizontal en $+\infty$, que es la recta $y = 2$

9. OPERACIONES CON FUNCIONES. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Operaciones con funciones

Análogamente a las operaciones con números reales se pueden definir la suma, resta, producto y cociente de funciones. Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, se definen las siguientes operaciones:

- Suma o resta de funciones: $(f \pm g)(x) = f(x) + g(x)$
- Producto de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Cociente de funciones: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Composición de funciones

Definición: Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que $\mathrm{Im}(f) \subseteq Dom(g)$, se llama *función compuesta* de la función *f* con *g* (o *f* compuesta con *g*) a: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Es decir, aplicamos *g* al resultado de aplicar *f* a la variable independiente "*x*"

No es conmutativo, es decir, normalmente $g \circ f \neq f \circ g$

Ejemplo: Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}-1} = \frac{x}{2\sqrt{x}-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{x^2}{2x-1}\right] = \sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}$$

Ejemplo: Sean $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ y $g(x) = 2x+1$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{x}{x-1}\right] = 2\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{2x + x - 1}{x-1} = \frac{3x-1}{x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2x+1] = \frac{2x+1}{(2x+1)-1} = \frac{2x+1}{2x}$$

9. FUNCIÓN INVERSA

Dada una función $y = f(x)$, la ***función inversa*** de f es aquella que devuelve cada valor imagen a su original y se nota por $f^{-1}(x)$

Se tiene que cumplir que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Ejemplo: Las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son inversas pues se tiene que

$(f \circ g)(x) = (f)(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$.

Ejemplo: Calcular la inversa de la función $f(x) = 2x + 5$

Partimos de $y = 2x + 5$ →permutamos la "x" y la "y", nos queda $x = 2y + 5$ →despejamos "y" → $x - 5 = 2y$ → $y = \dfrac{x-5}{2}$ → $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$

Y ya tenemos que $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$

Comprobación: Vamos a calcular $(f \circ f^{-1})(x)$ para ver que nos da la función identidad

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right] = 2\cdot(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}) + 5 = x - 5 + 5 = x$$

Lo mismo se puede hacer con $f^{-1} \circ f$

Ejemplo: Calcular la inversa de $f(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$

Partimos de $y = \dfrac{3x}{2x-1}$ →permutamos la "x" y la "y", nos queda $x = \dfrac{3y}{2y-1}$ →despejamos "y" → $x\cdot(2y-1) = 3y$ → $2xy - x = 3y$ → $2xy - 3y = x$ →sacamos factor común "y"→ $y\cdot(2x-3) = x$ → $y = \dfrac{x}{2x-3}$

Y ya tenemos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2x-3}$

Comprobación: Vamos a calcular $(f \circ f^{-1})(x)$ para ver que nos da la función identidad

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{x}{2x-3}\right] = \frac{3\dfrac{x}{2x-3}}{2\dfrac{x}{2x-3} - 1} = \frac{\dfrac{3x}{2x-3}}{\dfrac{2x-2x+3}{2x-3}} = \frac{\dfrac{3x}{2x-3}}{\dfrac{3}{2x-3}} = \frac{3x}{3} = x$$

Lo mismo se puede hacer con $f^{-1} \circ f$