UNIDAD 8: FUNCIONES RACIONALES, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Contenido

1. FUNCIONES DE LA FORMA $y=\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ 2
2. FUNCIÓNES EXPONENCIALES 5
3. FUNCIONES LOGARÍTMICAS 6

1. FUNCIONES DE LA FORMA $y=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$

Las gráficas de las funciones del tipo $y=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ son también hipérbolas equiláteras similares a las funciones de proporcionalidad inversa $y=\dfrac{k}{x}$.

En estos casos, las asíntotas que tiene son las siguientes:

- Asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$: la recta de ecuación $y=\dfrac{a}{c}$
- Asíntota vertical por la derecha y por la izquierda: la recta de ecuación $x=-\dfrac{d}{c}$

<u>Ejemplo</u>: Representar gráficamente la función $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$

Por lo anterior tenemos que:

Asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$: $y=\dfrac{2}{1}\Rightarrow y=2$

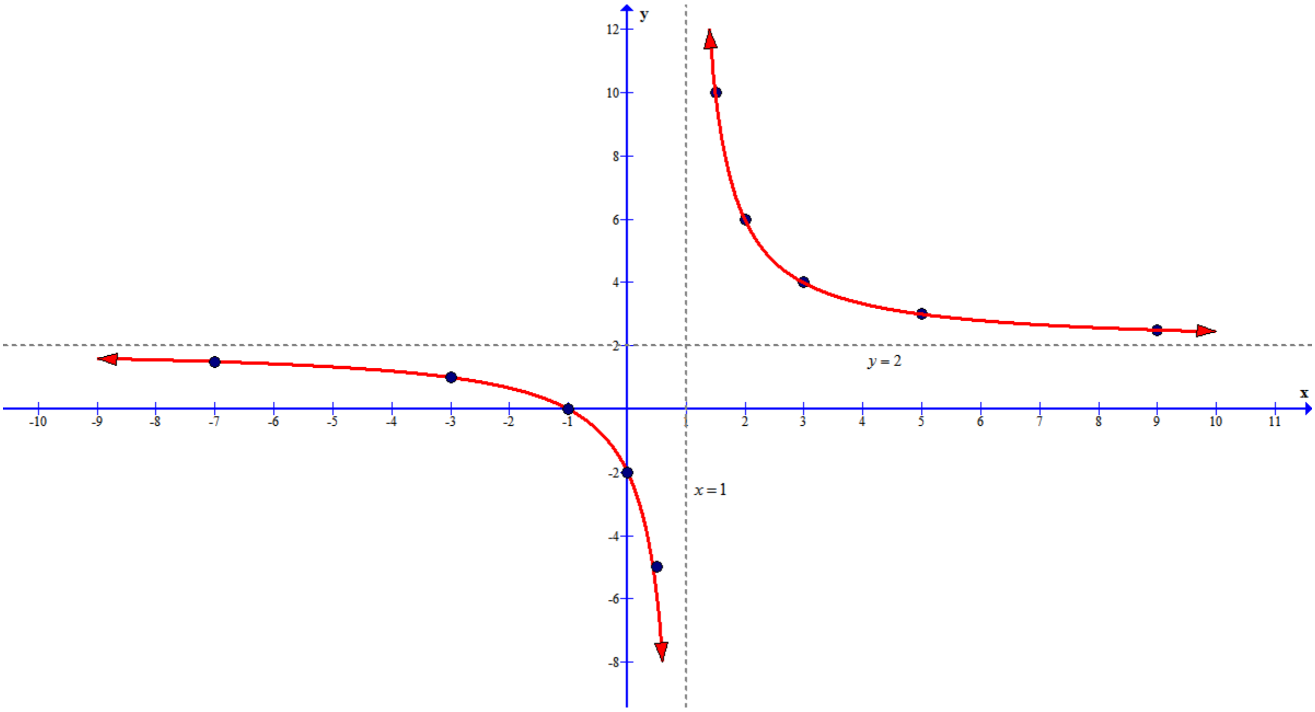
Asíntota vertical por la derecha y por la izquierda: $x=-\dfrac{-1}{1}\Rightarrow x=1$

Construimos una tabla de valores para conocer por donde se representa la hipérbola equilátera.

x	-7	-3	-1	0	0,5	1,5	2
$y=\dfrac{2x+2}{x-1}$	1,5	1	0	-2	-5	10	6

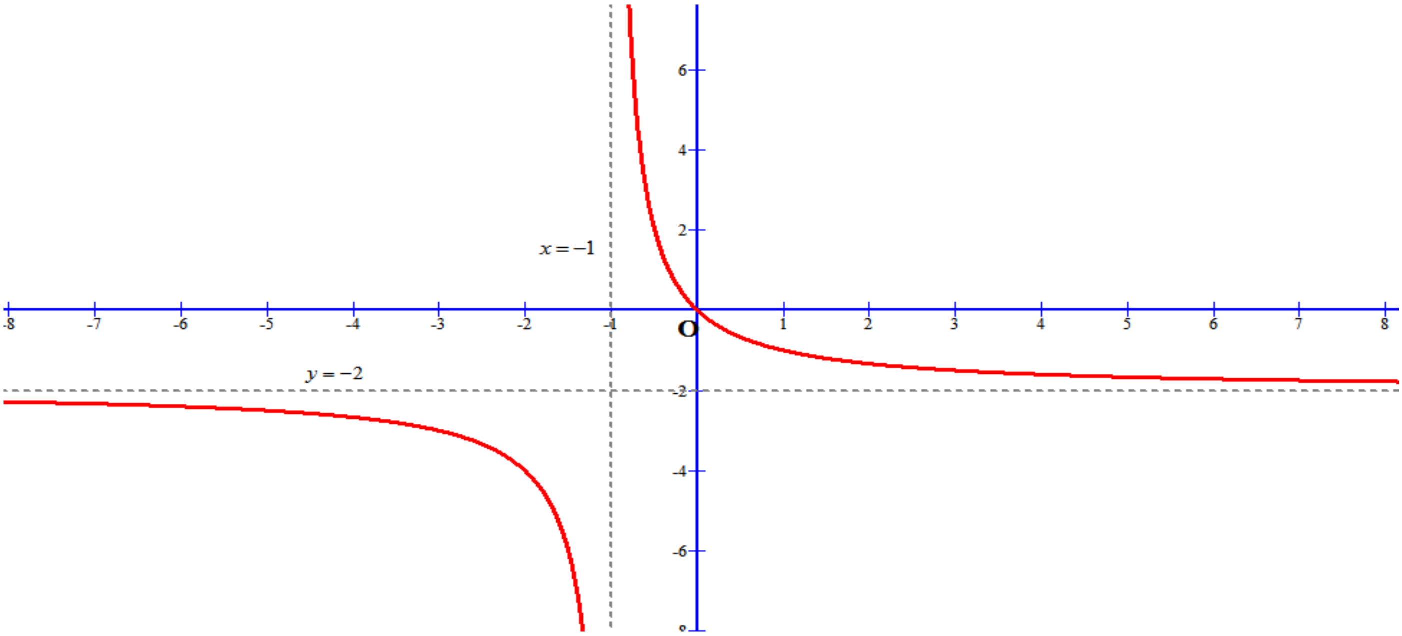
x	3	5	9
$y=\dfrac{2x+2}{x-1}$	4	3	2,5

Pasamos a dibujarla teniendo en cuenta todo lo obtenido:



Ejemplo: Representar gráficamente la función $y = \dfrac{-6x}{3x+3}$

Os dejo a vosotros hacerlo, pero el resultado tiene que ser similar a esto:



Ejemplo: La función $f(x) = \dfrac{400x+400}{x+18}$ nos da el número de pulsaciones por minuto de una persona que está aprendiendo a teclear un ordenador en función del número de clases particulares, de una hora, a las que asiste.

a) ¿Cuántas pulsaciones por minuto da al comienzo de las clases y cuántas dará al cabo de 3, 5 y 20 clases recibidas?
b) ¿Cuántas horas debe practicar para dar 300 pulsaciones por minuto?
c) Representa la gráfica de la función.
d) A la vista de la gráfica, responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿A partir de qué número de clases alcanza más de 300 pulsaciones por minuto?
2. ¿Qué nº de clases debe recibir para alcanzar las 500 pulsaciones por minuto?
3. ¿Qué nº máximo de pulsaciones por minuto puede llegar a alcanzar?

a) Al comienzo de las clases, como *x* = 0 horas, resultan $f(0)=\dfrac{400\cdot 0+400}{0+18}=22.2$ pulsaciones por minuto.

Para 3 clases tenemos $f(3)=\dfrac{400\cdot 3+400}{3+18}=76{,}2$ pulsaciones por minuto. Para 5 clases nos da $f(5)=\dfrac{400\cdot 5+400}{5+18}=104{,}3$ pulsaciones por minuto y para 20 clases nos resulta $f(20)=\dfrac{400\cdot 20+400}{20+18}=221{,}1$ pulsaciones por minuto.

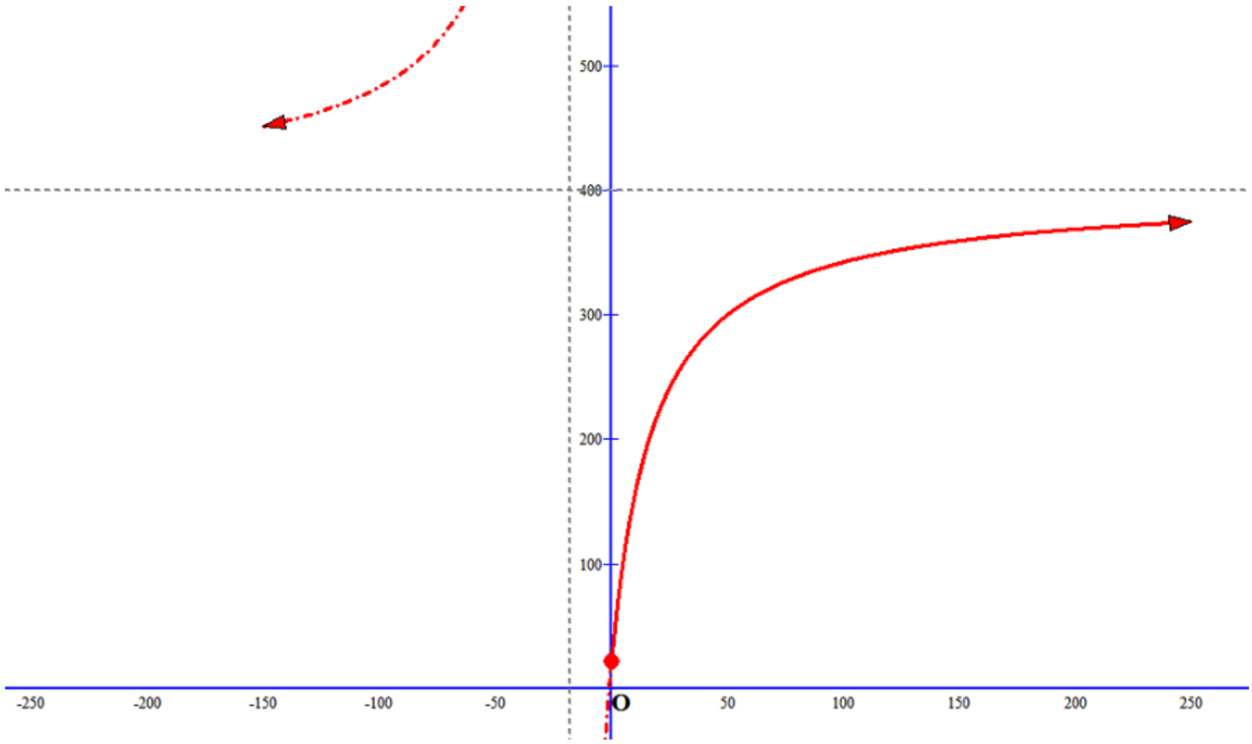
b) Para alcanzar las 300 pulsaciones por minuto debe practicar *x* horas, de modo que resolvemos la ecuación:
$\dfrac{400\cdot x+400}{x+18}=300 \rightarrow 300\cdot(x+18)=400\cdot x+400 \rightarrow x=50$ horas

c) Vamos a representarla gráficamente con los puntos obtenidos anteriormente y con sus asíntotas
Asíntota horizontal: $y=400$

Asíntota vertical: $x=-18$

En trazo discontinuo la parte de la hipérbola que no interesa para el problema.

Sólo nos interesa a partir de $x = 0$



d) Tenemos que:
1. Alcanza más de 300 pulsaciones/min al recibir más de 50 clases.
2. Observando la gráfica vemos que nunca alcanzará las 500 pulsaciones/min.
3. El nº máximo de pulsaciones por minuto que puede llegar a alcanzar se acerca a 400 que es su asíntota horizontal, pero que no alcanza.

2. FUNCIÓNES EXPONENCIALES

Son funciones de la forma $f(x)=a^x$ donde $a>0$ y $a\neq 1$.

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y van a estar acotadas inferiormente por 0, que es su ínfimo.

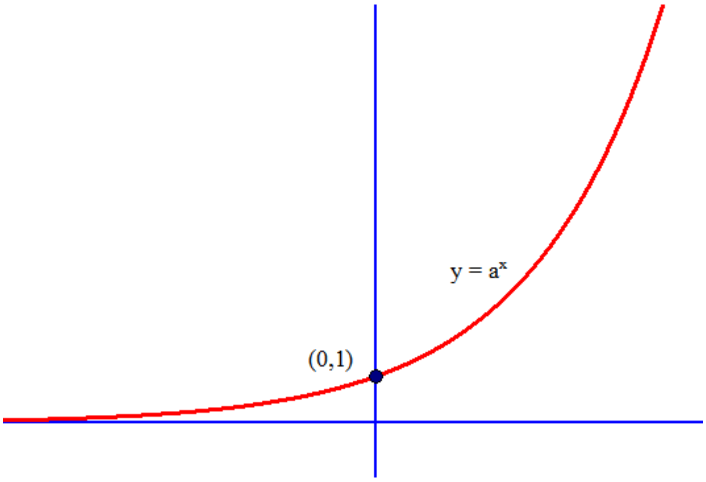
Todas pasan por el punto $(0,1)$

Su imagen es $\text{Im}(a^x)=(0,+\infty)$

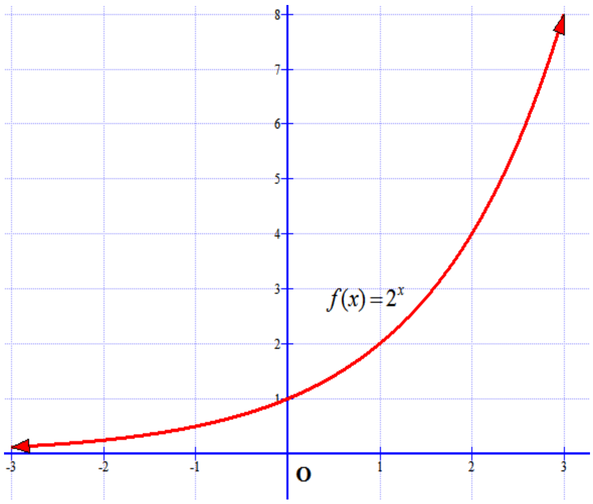
Vamos a distinguir dos casos:

a) La base a mayor que 1 $(a>1)$

En este caso son funciones *crecientes* y su gráfica es como sigue:

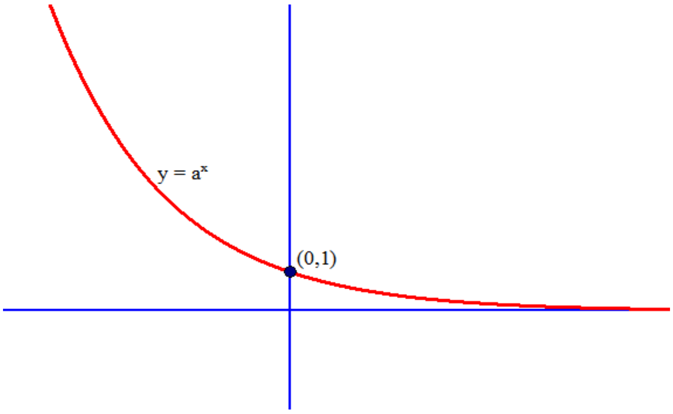


Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x)=2^x$

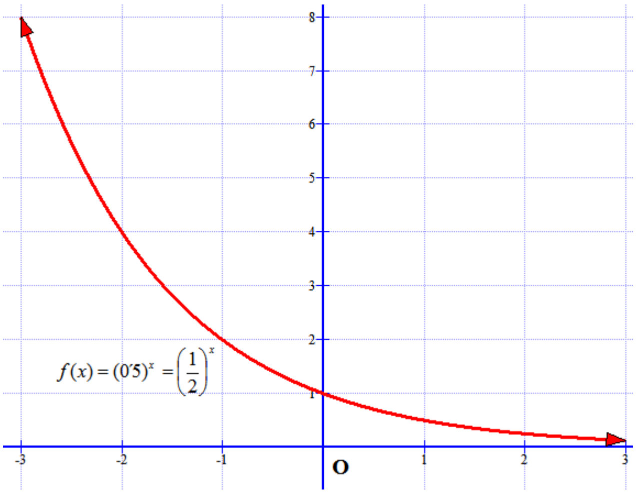


b) La base a entre 0 y 1 $(0<a<1)$

En este caso son funciones *decrecientes* y su gráfica es como sigue:



Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x) = (0{'}5)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



3. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Como sabemos el argumento ha de ser estrictamente positivo, por tanto $Dom(\log_a) = (0, +\infty) = R^+$

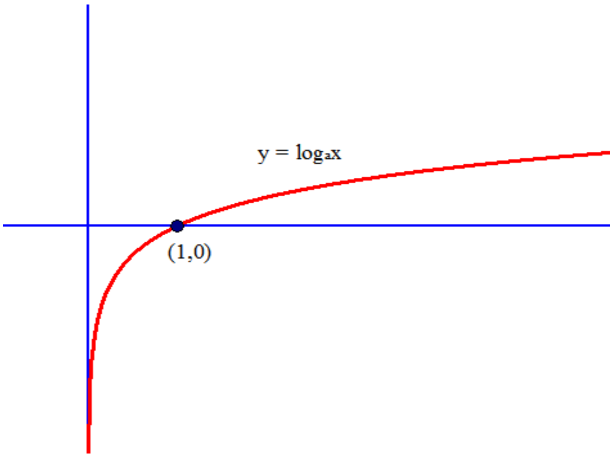
Todas pasan por el punto $(1,0)$

Su imagen es todo R

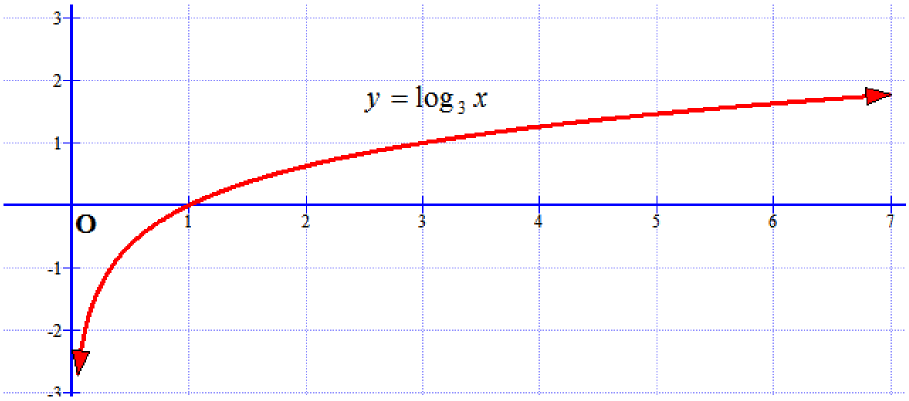
Vamos a distinguir dos casos:

a) La base a mayor que 1 $(a > 1)$

En este caso son funciones *crecientes* y su gráfica es como sigue:

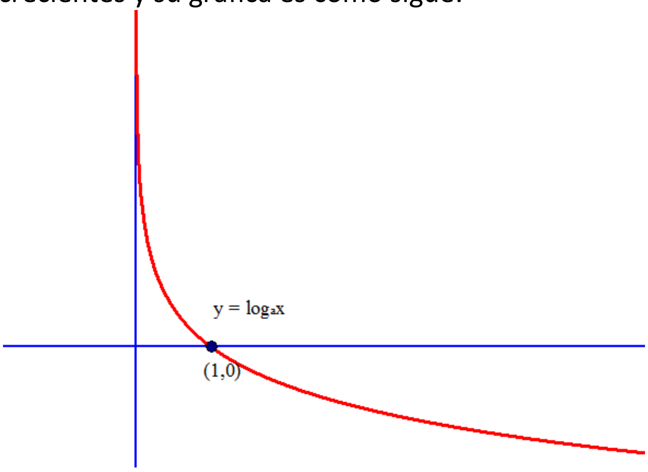


Ejemplo: Representamos gráficamente la función $y = \log_3 x$

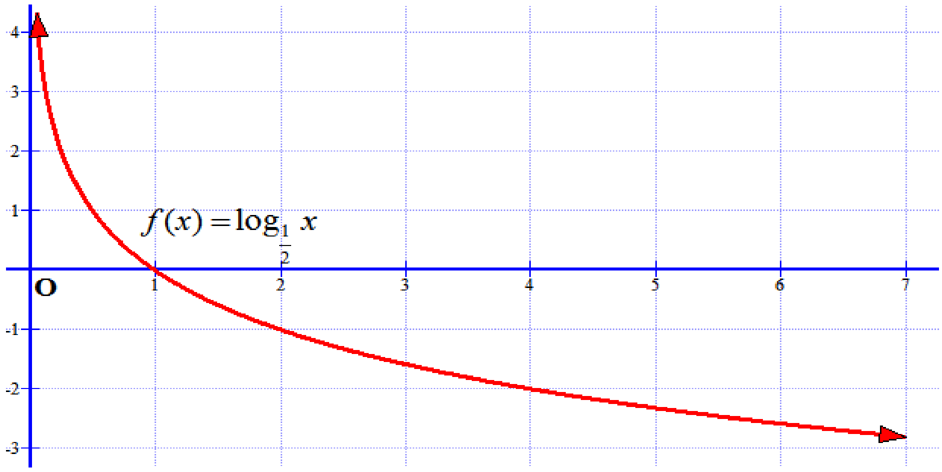


b) La base a entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones decrecientes y su gráfica es como sigue:



Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$


$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
O
1
2
3
4
5
6
7
4
3
2
1
-1
-2
-3