EJERCICIOS RESUELTOS HOJA 1
UNIDAD 10: LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

Cuestión 1:

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas cartesianas es 10.

¿Y si la condición del lugar geométrico es que su producto sea 10?

Los puntos que verifican la primera condición forman una recta de ecuación: $x + y = 10$

Los puntos que verifican la segunda condición forman una hipérbola equilátera de ecuación: $xy = 10$

Cuestión 2:

Calcula las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos e identifícalos.

a) Puntos que equidistan de $A(-3, 3)$ y de $B(-1, -5)$.

b) Puntos que equidistan de r: $2x + y = 0$ y s: $x - y = 0$.

c) Puntos que equidistan de las rectas paralelas r: $x + y = 5$ y s: $x + y = 9$.

d) Puntos del plano cuya distancia a la recta $x + 2y = 0$ es de 2 unidades.

e) Puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es el doble que la distancia al punto (2, 0).

a) Mediatriz del segmento AB. Su ecuación es $x - 4y - 2 = 0$.

b) Bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s.

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|2x + y|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x - y|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x + y}{\sqrt{5}} = \dfrac{x - y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(2\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) x + \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) y = 0 \\ \dfrac{2x + y}{\sqrt{5}} = \dfrac{y - x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) x + \left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) y = 0 \end{cases}$$

c) Recta paralela a ambas por (0, 7).

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|x + y - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x + y - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 5 = x + y - 9 \Rightarrow -5 \neq -9 \\ x + y - 5 = -x - y + 9 \Rightarrow x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

d) Rectas paralelas a la recta dada por $(0,2\sqrt{2})$ y $(0,-2\sqrt{2})$.

$$d(P, r) = 2 \Rightarrow \frac{|x + 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2\sqrt{5} \\ x + 2y = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

e) Circunferencia de centro $\left(\dfrac{8}{3}, 0\right)$ y de radio $\dfrac{4}{3}$.

$$d(P; O) = 2d(P; (2,0)) \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4(x - 2)^2 + 4y^2 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 16x + 16 = 0$$

Cuestión 3:

Escribe la ecuación de las circunferencias que verifican las siguientes condiciones.

a) El centro es el punto $C(-3, 1)$ y el radio es $r = 4$.

b) Uno de sus diámetros es el segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(4, -2)$.

a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

b) Centro: $\left(\dfrac{-2 + 4}{2}, \dfrac{0 - 2}{2}\right) = (1\ -1)$ Radio: $\dfrac{d(A,B)}{2} = \dfrac{\sqrt{36 + 4}}{2} = \dfrac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$

Cuestión 4:

Identifica cuáles de las curvas representadas por las siguientes ecuaciones son circunferencias y halla, si es posible, su centro y su radio.

a) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 14 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ c) $x^2 + y^2 = 9$

En todos los casos, la ecuación representa una circunferencia:

a) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 14 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + \frac{14}{3} = 0 \Rightarrow C(1\ -2)\quad r = \sqrt{1 + 4 - \frac{14}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Centro: $C = (1\ -2)$ Radio: $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $x^2 + y^2 - 6x = 0 \Rightarrow C\left(\frac{6}{2}, 0\right) = (3, 0),\quad r = \sqrt{9} = 3$ Centro: $C = (3, 0)$, Radio: $r = 3$

c) $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow$ Centro: $C = (0, 0)$, Radio: $r = 3$

Cuestión 5:

Estudia, en cada caso, si el punto P es interior, exterior o perteneciente a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

a) $P(2, 4)$ b) $P(2, 2)$ c) $P(2, 5)$

Centro: $C = (5, 0)$ Radio: $r = \sqrt{25} = 5$

a) $P(2, 4) \Rightarrow d(P, C) = \sqrt{9 + 16} = 5 \Rightarrow P \in$ circunferencia

b) $P(2, 2) \Rightarrow d(P, C) = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} < 5 \Rightarrow P$ es interior a la circunferencia.

c) $P(2, 5) \Rightarrow d(P, C) = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} > 5 \Rightarrow P$ es exterior a la circunferencia.

Cuestión 6:

Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ y la recta $4x + 3y = 34$:

a) Halla las coordenadas del centro y la medida del radio de la circunferencia y calcula la distancia del centro a la recta.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones formado por la circunferencia y la recta y compara el resultado con el del apartado anterior.

a) Centro: C = (0, 3) Radio: r = 9 + 16 = 5

$$d(C, \text{recta}) = \frac{|4 + 0 + 3 + 3 - 34|}{\sqrt{16} + 9} = \frac{25}{5} = 5 = r$$

La recta es tangente a la circunferencia

$$\text{b)}\ \begin{matrix} x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \\ 4x + 3y = 34 \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{34 - 3y}{4} \Rightarrow \left(\frac{34 - 3y}{4}\right)^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1156 + 9y^2 - 204y}{16} + y^2 - 6y - 16 = 0$$

$$1156 + 9y^2 - 204y + 16y^2 - 96y - 256 = 0 \Rightarrow 25y^2 - 300y + 900 = 0 \Rightarrow y^2 - 12y + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$(y - 6)^2 = 0 \Rightarrow y = 6,\ x = \frac{34 - 18}{4} = 4$$

La recta es tangente a la circunferencia en el punto P(4 6)

Cuestión 7:

. Indica la posición relativa de la circunferencia y la recta en los siguientes casos.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$; $x - y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 0$

c) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + 4y = 25$

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$; $x - y + 5 = 0$

Centro: $C = (3, -4)$ Radio: $r = \sqrt{9 + 16 + 25} = 5\sqrt{2}$

$d(C, \text{recta}) = \frac{|3 + 4 + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} > 5\sqrt{2} \Rightarrow$ La recta no corta a la circunferencia, es decir, es exterior a ella.

b) $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 0$

Centro: $C = (0, 0)$ Radio: $r = 2$

$d(C, \text{recta}) = 0 < 2 \Rightarrow$ La recta corta en dos puntos (es secante) a la circunferencia.

c) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + 4y = 25$

Centro: $C = (0, 0)$ Radio: $r = 5$

$d(C\ \ \text{recta}) = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = 5 = r \Rightarrow$ La recta corta en un punto (es tangente) a la circunferencia.

Cuestión 8:

Las trayectorias de dos partículas se describen mediante las circunferencias

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ y } x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0.$$

Determina la posición relativa de las trayectorias. ¿Es posible que las partículas se encuentren?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2,\ y = 0$$

Las trayectorias son tangentes en el punto $P(2, 0)$. Por tanto, las partículas pueden encontrarse en ese punto.

Cuestión 9:

Halla la posición relativa entre cada punto y la circunferencia. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

a) $P\left(1, \frac{2}{3}\right)$ b) $Q\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $R\left(2, \frac{1}{4}\right)$

a) $Pot_{Cf}(P) = 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4}$ Punto interior a la circunferencia

b) $Pot_{Cf}(P) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{4 + 2 + 4\sqrt{2}}{4} -$

$- 4 - 2\sqrt{2} + 1 = 2 + 1 + 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2} + 1 = 0$

Punto perteneciente a la circunferencia

c) $Pot_{Cf}(P) = 2^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{16}$ Punto exterior a la circunferencia

Cuestión 10:

Estudia para qué valores de m el punto $P(5, m)$ es interior, para qué valores es exterior y para qué valores pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$.

$Pot_{Cf}(P) = 25 + m^2 - 20 - 4 + m - 17 = m^2 - 4m - 12$

$m^2 - 4m - 12 = 0$ si $m = 6$ ó $m = -2$ Puntos pertenecientes a la circunferencia

$m^2 - 4m - 12 < 0$ si $-2 < m < 6$ Puntos interiores a la circunferencia

$m^2 - 4m - 12 > 0$ si $m < -2$ ó $m > 6$ Puntos exteriores a la circunferencia

Cuestión 11:

Calcula el eje radical de las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 = 9$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

Eje radical: $4x - 2y - 9 - 1 = 0 \Rightarrow 4x - 2y - 10 = 0 \Rightarrow 2x - y - 5$

Cuestión 12:

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6, 0)$ y $N(-2, 0)$ es 3 (es decir, $\overline{PM}/\overline{PN} = 3$)?

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = 3 \quad \to \quad \frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = 3$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 9\,[(x+2)^2 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9\,[x^2 + 4x + 4 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2$$

$$8x^2 + 8y^2 + 48x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x = 0$$

Es una circunferencia de centro $(-3, 0)$ y radio 3.

Cuestión 13:

¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a $x^2 + y^2 = 9$?

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y el radio es $r = 3$. La distancia de C a la recta s: $x - y + b = 0$ ha de ser igual al radio:

$$dist\,(C, s) = \frac{|b|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \;\rightarrow\; |b| = 3\sqrt{2} \begin{cases} b = 3\sqrt{2} \\ b = -3\sqrt{2} \end{cases}$$

Luego las rectas $y = x + 3\sqrt{2}$ e $y = x - 3\sqrt{2}$ son tangentes a la circunferencia dada.

Cuestión 14:

Halla la ecuación de la elipse de focos $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$ y cuya constante es 10.

Una vez puesta la ecuación inicial, pasa una raíz al segundo miembro, eleva al cuadrado (¡atención con el doble producto!), simplifica, aísla la raíz, vuelve a elevar al cuadrado y simplifica hasta llegar a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado: $(x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Operamos: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

$$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$$

$$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$$

Elevamos al cuadrado: $25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$

Simplificamos:

$$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \;\rightarrow\; 9x^2 + 25y^2 = 225$$

Cuestión 15:

Halla la ecuación de la hipérbola de focos $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$ y cuya constante es 6. Simplifica como en el ejercicio anterior hasta llegar a la expresión $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces:

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 6$$

$$dist(P, F_1) - dist(P, F_2) = \pm 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 20x + 36$$

$$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 9$$

Elevamos al cuadrado: $9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$

$$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$$

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

Cuestión 16:

Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1, 0)$ y directriz r: $x = 1$. Simplifica hasta llegar a la expresión $y^2 = -4x$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$dist(P, F) = dist(P, r)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x - 1|$

Elevamos al cuadrado: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplificamos: $y^2 = -4x$

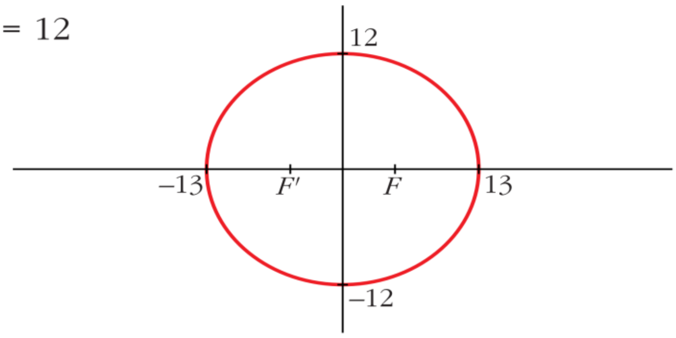
Cuestión 17:

Una elipse tiene sus focos en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y su constante es $k = 26$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje mayor: $k = 26 \;\rightarrow\; 2a = 26 \;\rightarrow\; a = 13$
- Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 10 \;\rightarrow\; 2c = 10 \;\rightarrow\; c = 5$
- Semieje menor: $b^2 = a^2 - c^2 = \sqrt{169 - 25} =$

  $= \sqrt{144} = 12 \;\rightarrow\; b = 12$
- Excentricidad: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}38 \;\rightarrow$

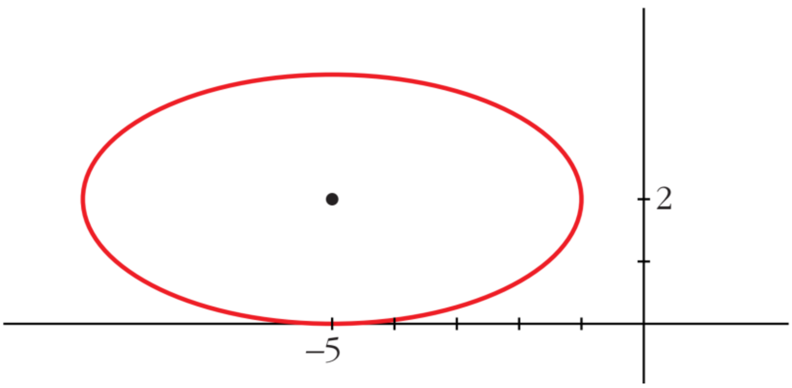
  $\rightarrow\; exc \approx 0{,}38$
- Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$



Cuestión 18:

Representa y di su excentricidad:

$$\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



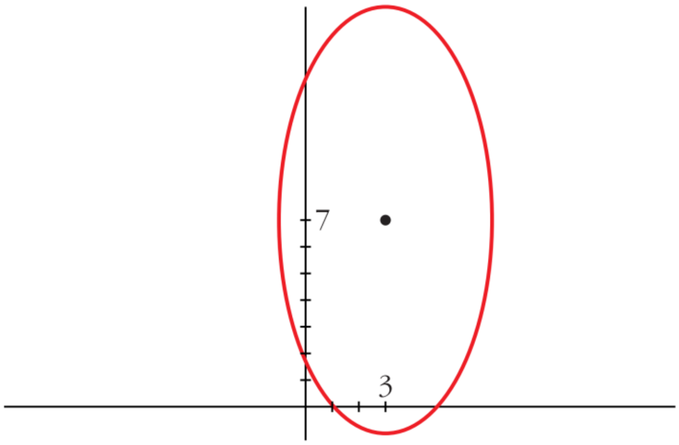
$c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

$exc = \dfrac{\sqrt{12}}{4} \approx 0{,}87$

Cuestión 19:

Representa y di su excentricidad:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$



$$c = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$$

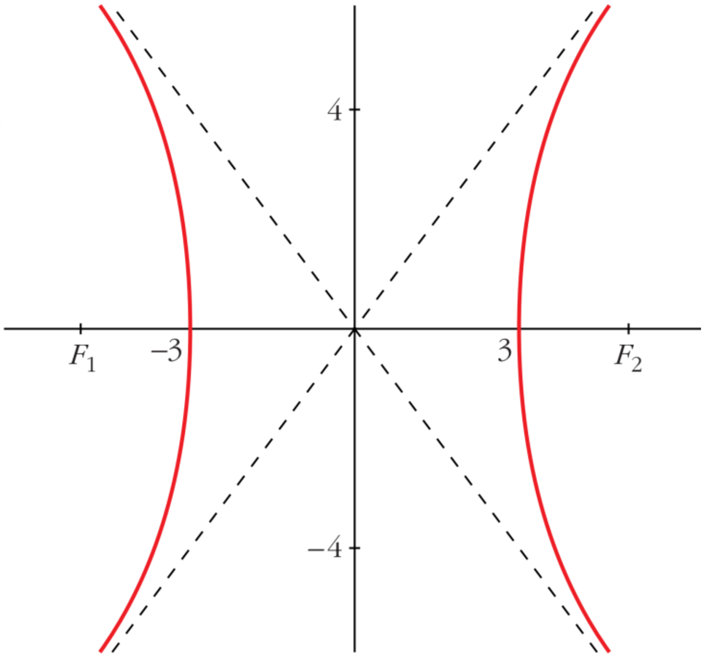
$$exc = \frac{\sqrt{48}}{8} \approx 0{,}87$$

Cuestión 20:

Una hipérbola tiene sus focos en los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y su constante es $k = 6$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje: $k = 2a = 6 \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow$

  $\rightarrow b = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow b = 4$
- Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$; $y = -\dfrac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



Cuestión 21:

Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(1{,}5; 0)$ y directriz $x = -1{,}5$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{(x-1{,}5)^2 + y^2} = |x + 1{,}5|$$

$$x^2 - 3x + 2{,}25 + y^2 = x^2 + 3x + 2{,}25 \rightarrow y^2 = 6x$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 3$

  Ecuación reducida: $y^2 = 6x$

Cuestión 22:

Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C(-2, 1)$ y que pasa por $P(0, -4)$.

El radio de la circunferencia es la distancia de P a C:

$$r = |\overrightarrow{PC}| = |(-2, 5)| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

La ecuación es: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 29$, o bien, $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$

Cuestión 23:

¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y su radio es $r = 1$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$: $d = dist\,(C, s) = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \quad \to \quad |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Cuestión 24:

Dibuja e indica los elementos de cada una de las siguientes elipses.

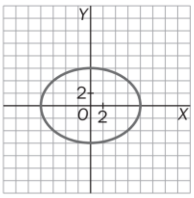
a) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{169} = 1$ c) $\dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y + 3)^2}{4} = 1$ d) $x^2 + \dfrac{(y - 1)^2}{4} = 1$

a) $a = 8$, $b = 6$, $c = \sqrt{28}$. Centro: $(0, 0)$.

Vértices: $(8, 0)$, $(-8, 0)$, $(6, 0)$, $(-6, 0)$

Focos: $(-\sqrt{28}, 0)$. $(\sqrt{28}, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{28}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

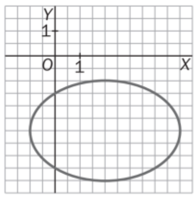


c) $a = 13$, $b = 12$, $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. Centro: $(2, -3)$

Vértices: $(6, -3)$, $(-1, -3)$, $(2, -1)$, $(2, -5)$

Focos: $(2 - \sqrt{5}, -3)$ $(2 + \sqrt{5}, -3)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

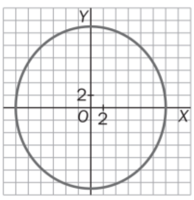


b) $a = 13$ $b = 12$ $c = \sqrt{25} = 5$. Centro: $(0, 0)$

Vértices: $(0, 13)$, $(0, -13)$, $(12, 0)$, $(-12, 0)$

Focos: $(0, 5)$, $(0, -5)$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

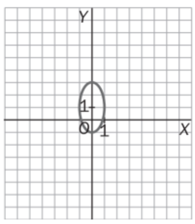


d) $a = 2$ $b = 1$ $c = \sqrt{3}$. Centro: $(0, 1)$

Vértices: $(0, -1)$, $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(-12, 0)$

Focos: $(0{,}1 - \sqrt{3})$, $(0{,}1 + \sqrt{3})$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Cuestión 25:

Calcula las ecuaciones de estas hipérbolas.

a) Vértice en $A(5, 0)$ y foco en $F(8, 0)$.

b) Foco en $F\left(\frac{15}{4}, 0\right)$ y pasa por $P(5, 3)$.

c) Asíntota, $y = 2x$, y eje real $2a$.

a) $a = 5 \quad c = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39} \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{15}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{225}{16} - a^2 \\ \frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{9}{\frac{225}{16} - a^2} = 1 \Rightarrow a = 3 \;\; b = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{81}{16}} = 1$

c) $\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - y^2 = 4a^2$

Cuestión 26:

. Calcula la máxima y la mínima distancia del punto $P(5, 2)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$.

$\begin{cases} C(-3, -4) \\ r = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases}$

$Pot_{Cf}(P) = 5^2 + 2^2 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 75$

Si la recta que une P con el centro corta a la circunferencia primero a una distancia x y después a una distancia $x + 2r$: $x + (x + 2r) = 75 \Rightarrow x^2 + 10x - 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm 20}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -15 \quad \text{no válida} \end{cases}$

Por tanto, la mínima distancia es 5, y la máxima, $5 + 2 \cdot 5 = 15$.

Cuestión 27:

Halla, en función del parámetro positivo a, la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = a$ y la recta de ecuación $y = x$.

Centro: $C = (2, 0)$ Radio: $r = \sqrt{a}$ $\quad d(C, recta) = \frac{|2 + 0 + 0|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

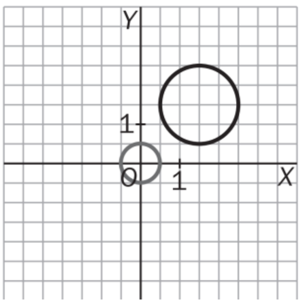
Si a=2, la recta es tangente a la circunferencia. Si a>2, es secante, y si a<2 es exterior a la circunferencia.

Cuestión 28:

Estudia la posición relativa de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0$ con cada una de las siguientes circunferencias.

a) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ b) $2x^2 + 2y^2 = 5$ c) $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 3 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 3y + 2 = 0$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{centro: } C_1(0, 0) \text{ radio } r_1 = \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$



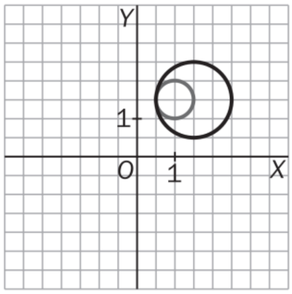
$d(C_1, C_2) = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad r_1 + r_2 = \frac{3}{2} \quad r_2 - r_1 = \frac{1}{2}$

$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2 \Rightarrow$ Las circunferencias son exteriores.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x^2 - 3y^2 + 3 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_1\left(1, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_1 = \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_2\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \quad r_1 + r_2 = \dfrac{3}{2} \quad r_2 - r_1 = \dfrac{1}{2}$

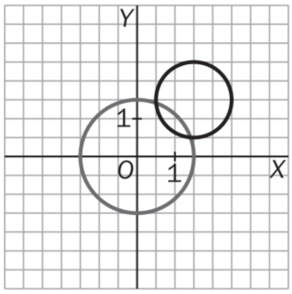
$d(C_1, C_2) = r_1 - r_2 \Rightarrow$ Las circunferencias son tangentes interiores.



c) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5 \Rightarrow \text{centro: } C_1\,(0, 0) \text{ radio } r_1 = \dfrac{5}{2} \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_2\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{\dfrac{18}{4}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \quad r_1 + r_2 = \dfrac{7}{2} \quad r_2 - r_1 = \dfrac{3}{2}$

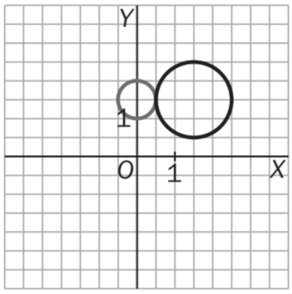
$r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2 \Rightarrow$ Las circunferencias son secantes.



d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3y^2 + 2 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_1\,(0, \dfrac{3}{2}) \text{ radio } r_1 = \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_2\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = \dfrac{3}{2} \quad r_1 + r_2 = \dfrac{3}{2} \quad r_2 - r_1 = \dfrac{1}{2}$

$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \Rightarrow$ Las circunferencias son tangentes exteriores.



Cuestión 29:

Calcula la potencia de cada punto respecto de la circunferencia indicada y señala su posición relativa.

a) $P(1, 3)$ y $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$

b) $P(1, -1)$ y $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

c) $P(5, 3)$ y $x^2 + y^2 - 7x - 8y = 0$

a) $Pot_{Cf}(P) = 8 \cdot 1^2 + 8 \cdot 3^2 - 79 \cdot 1 - 32 \cdot 3 + 95 = 0$ El punto pertenece a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(P) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 > 0$ El punto es exterior a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(P) = 5^2 + 3^2 - 7 \cdot 5 - 8 \cdot 3 = -25 < 0$ El punto es interior a la circunferencia.

Cuestión 30:

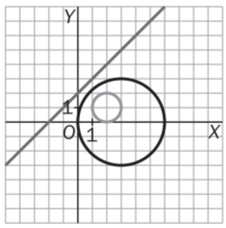
Calcula el eje radical de las siguientes parejas de circunferencias y representa gráficamente la situación en cada caso.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0;\ \ x^2 + y^2 - 6x = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0;\ \ 2x^2 + 2y^2 - 4y = 0$

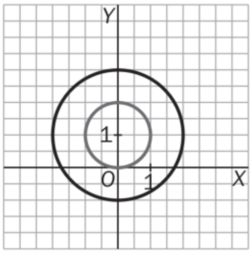
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow -4x - 2y + 4 + 6x = 0$

$\Rightarrow 2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$ Eje radical: $x - y + 2 = 0$



b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$

Las circunferencias son concéntricas. No existe el eje radical.



Cuestión 31:

Calcula las tangentes a las circunferencias siguientes en el punto dado.

a) $x^2 + y^2 = 26$ en $P(-1, 5)$

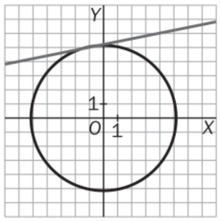
b) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 17y + 23 = 0$ en $P(1, -2)$

a) La recta tangente debe ser perpendicular al radio correspondiente al punto:

$C(0, 0)\ P(-1, 5) \Rightarrow \overline{CP} = \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{5} \Rightarrow 5x + y = 0$

La tangente será:

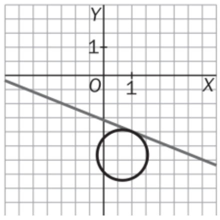
$x - 5y + k = 0 \Rightarrow -1 - 25 + k = 0 \Rightarrow k = 26 \Rightarrow x - 5y + 26 = 0$



b) La recta tangente debe ser perpendicular al radio correspondiente al punto:

$C\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{17}{6}\right)\ P(1, -2) \Rightarrow \overline{CP} = \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{5} \Rightarrow 5x - 5 = 2y + 4 \Rightarrow 5x - 2y - 9 = 0$

La tangente será: $2x + 5y + k = 0 \Rightarrow 2 - 10 + k = 0 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow 2x + 5y + 8 = 0$



Cuestión 32:

Dada la circunferencia $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, calcula las ecuaciones de sus tangentes paralelas a la recta $3x + 4y - 16 = 0$.

Las posibles soluciones serán de la forma $3x + 4y + k = 0$.

La distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio:

$$\frac{|3 + (-3) + 4 \cdot 1 + k|}{\sqrt{9 + 16}} = 5 \Rightarrow \begin{cases} -5 + k = 25 \Rightarrow k = 30 \Rightarrow 3x + 4y + 30 = 0 \\ 5 - k = 25 \Rightarrow k = -20 \Rightarrow 3x + 4y - 20 = 0 \end{cases}$$

Cuestión 33:

Calcula las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$ que sean perpendiculares a la recta de ecuación $3x - 4y = 14$.

Centro: $(2, -2)$ Radio: $r = \sqrt{4 + 4 + 17} = 5$

Las posibles soluciones serán de la forma $4x + 3y + k = 0$.

La distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio:

$$\frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + k|}{\sqrt{25}} = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 + k = 25 \Rightarrow k = 23 \Rightarrow 4x + 3y + 23 = 0 \\ -2 - k = 25 \Rightarrow k = -27 \Rightarrow 4x + 3y - 27 = 0 \end{cases}$$