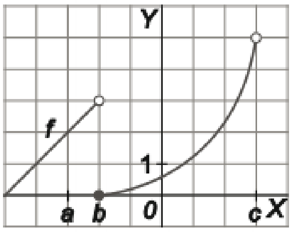
EJERCICIOS RESUELTOS HOJA 1
UNIDAD 12: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD.

Cuestión 1:

Dada la función de la figura, calcula $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ y los límites laterales y el límite de f en a, b y c.

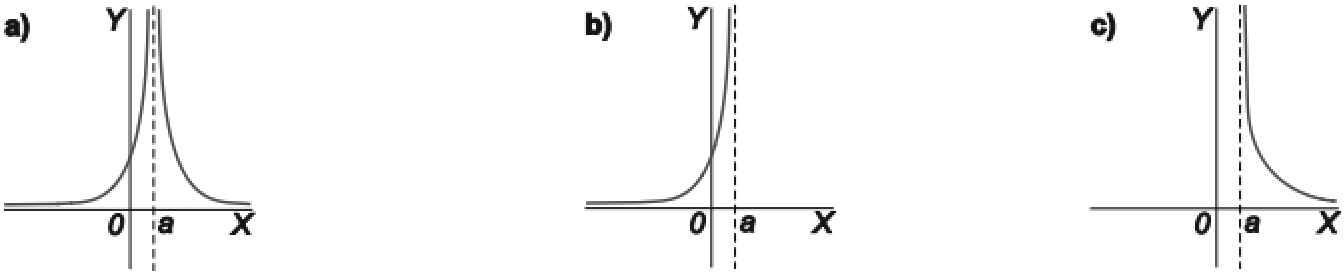


$f(a) = 2$, $f(b) = 0$ y $f(c)$ no existe.

$\lim_{x\to a^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to a} f(x) = 2$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to b^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to b} f(x)$ no existe, $\lim_{x\to c^-} f(x) = 5$, $\lim_{x\to c^+} f(x)$ no existe y $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe.

Cuestión 2:

Halla $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ en estas funciones.



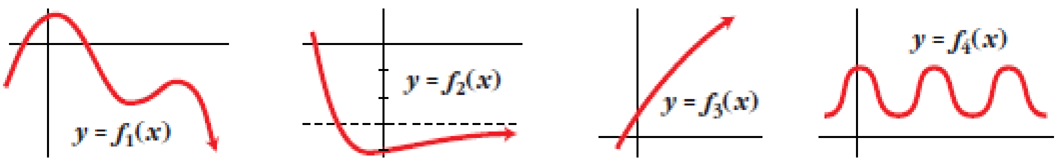
a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ no existe.

c) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ no existe, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

Cuestión 3:

Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



$\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = -3$

$\lim_{x\to +\infty} f_3(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f_4(x)$ no existe

Cuestión 4:

Calcula estos límites:

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x\to 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$

b) -1

Cuestión 5:

Calcula $\lim_{x \to 2} f(x)$ en los siguientes casos.

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+x-6}$

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{0}{4} = 0$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-5)}{(x+2)} = -\frac{3}{4}$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{0}{3} = 0$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x}{x^2+x-6}$, el numerador tiende a 4 y el denominador a 0, por lo que la función se hace muy grande en valor absoluto cuando x tiende a 2. Estudiando el signo de la función cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha tenemos:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-2x}{x^2+x-6} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-2x}{(x-2)(x+3)} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-2x}{x^2+x-6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-2x}{(x-2)(x+3)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x}{x^2+x-6} \text{ no existe.}$$

Cuestión 6:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$ **b)** $\lim_{x \to -1} (x^3 - x)$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{1-x}{x-2}$ **d)** $\lim_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$ **f)** $\lim_{x \to 4} \log_2 x$

g) $\lim_{x \to 0} \cos x$ **h)** $\lim_{x \to 2} e^x$

a) 5 b) 0

c) -2 d) $\sqrt{2}$

e) 4 f) 2

g) 1 h) e^2

Cuestión 7:

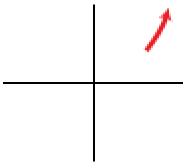
Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa el resultado que obtengas.

a) $f(x) = x^3 - 10x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

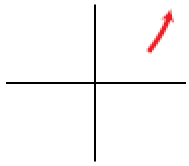
c) $f(x) = \frac{3-x}{2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{-3}$

☛ ***Dale a x "valores grandes" y saca conclusiones.***

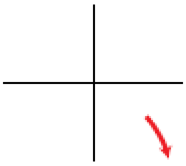
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



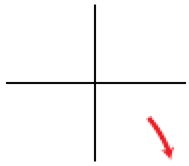
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



<u>Cuestión 8</u>:

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, calcula los límites en $x=a$ de fg, $f:g$, f^g

$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)=3\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, el numerador tiende a 3 y el denominador a 0, por lo que $\dfrac{f}{g}$ se hace arbitrariamente grande en valor absoluto cerca de $x=a$. Habría que estudiar el signo de $\dfrac{f}{g}$ cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha, es decir, determinar los límites laterales. Si los límites laterales existen y coinciden, $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ existirá y su valor coincidirá con el de los límites laterales, en caso contrario $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ no existirá.

$\lim\limits_{x\to a}\left(f^g\right)(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=3^0=1$

<u>Cuestión 9</u>:

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=-\dfrac{1}{2}$, ya que el numerador y el denominador tienen el mismo grado.

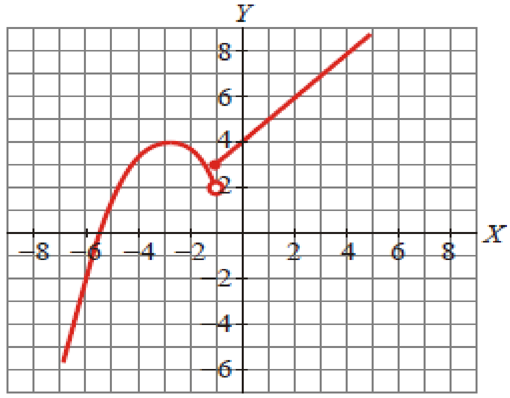
Si se quiere ser más riguroso: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x}-2}=\dfrac{1-0+0}{0-0-2}=-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}=0$, ya que el "grado" del "numerador" es menor que el grado del denominador.

Si se quiere ser más riguroso: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}}{\dfrac{x+6}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x}}}{1+\dfrac{6}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$

Cuestión 10:

A partir de la gráfica de *f(x)*, calcula:



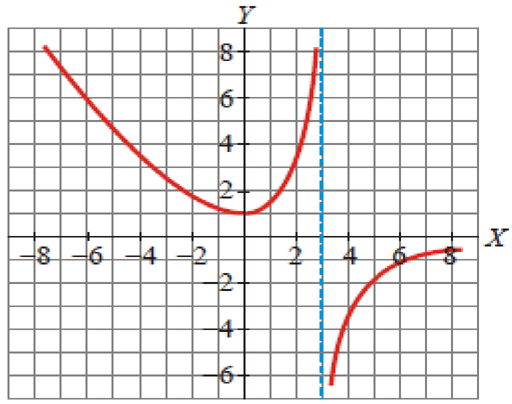
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to-5} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=2$ d) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=3$ e) $\lim\limits_{x\to-5} f(x)=0$

Cuestión 11:

La siguiente gráfica corresponde a la función *f(x)*. Sobre ella, calcula los límites:



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Solución:

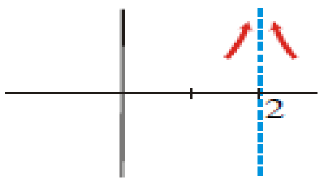
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ c) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ d) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty$ e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$

Cuestión 12:

Representa los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$

Solución:



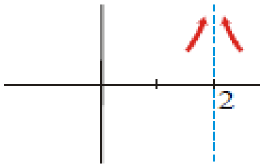
Cuestión 13:

Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x =$ 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{(x-2)^2} = +\infty$$



Cuestión 14:

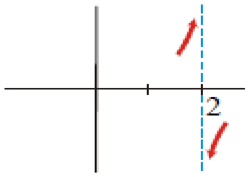
Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$, calcula el límite de $f(x)$ en $x = 2$. Representa la información que obtengas.

Solución:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = -\infty$$



Cuestión 15:

Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 3$:

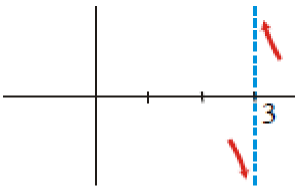
$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2-9}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x^2-9} = +\infty$$



Cuestión 16:

Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 0$:

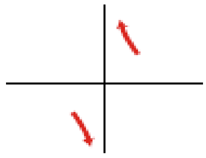
$$\lim_{x \to 0} \frac{2x+1}{x^2+2x}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x+1}{x^2+2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x+1}{x(x+2)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2x+1}{x^2+2x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2x+1}{x^2+2x} = +\infty$$



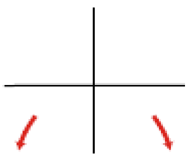
Cuestión 17:

Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de la siguiente función y representa la información que obtengas:

$$f(x) = \frac{1-2x^2+4x}{3}$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-2x^2+4x}{3} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1-2x^2+4x}{3} = -\infty$$



Cuestión 18:

Calcula y representa gráficamente la información obtenida

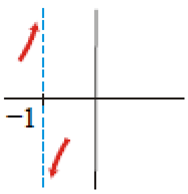
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1}$$

Solución:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x-4}{x+1}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x-4}{x+1} = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x-4}{x+1} = -\infty$$



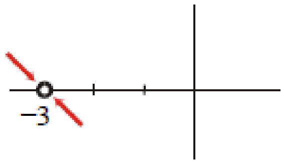
Cuestión 19:

Resuelve el siguiente límite e interprétalo gráficamente.

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6}$$

Solución:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to -3} \frac{2(x+3)^2}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \to -3} \frac{2(x+3)}{(x-2)} = 0$$



Cuestión 20:

Calcula los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$

a) El límite en $-\infty$ no existe pues la función solo está definida si $x \geq 5$, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-5} = +\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x} = \begin{cases} \dfrac{-x}{2-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, así $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{2-x} = 1$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2-x} = -1$

Cuestión 21:

Halla, si existen, estos límites.

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-3}{x^2 - 2x + 1}$

b) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x-1}{x^2 - x}$

c) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x-1}{x^2 - x}$

d) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 1}$

e) $\lim_{x \to 4^-} \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x + 8}$

f) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^3 - 50}{x^2 + 10x + 25}$

g) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2}$

h) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2}$

i) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2}$

j) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2}$

k) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2}$

l) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2}$

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x-3}{(x-1)^2} = -\infty$

b) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x-1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

c) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x-1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

d) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

e) $\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2+4x-1}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2+4x-1}{(x-4)(x-2)}=-\infty$

f) $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-50}{x^2+10x+25}=\frac{75}{100}=\frac{1}{4}$

g) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(x^3-3\right)}{x^2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3}{x(x-2)}$ no existe, pues el signo del cociente cambia si la aproximación a 2 es por la derecha o por la izquierda.

h) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-3}{x(x-2)}=+\infty$

i) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-3}{x(x-2)}=-\infty$

j) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=-\infty$

k) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=+\infty$

l) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3}{x(x-2)}$ no existe, pues el signo del cociente cambia según sea la aproximación a derecha o por la izquierda.

Cuestión 22:

En caso de existir, calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{x^2-x}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}$ g) $\lim_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ j) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{x^2-x}$ e) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}$ h) $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}$ k) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x}{x^2-x}$ f) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ l) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\frac{10}{2}=5$

b) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\frac{0}{12}=0$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\frac{-2}{2}=-1$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x-1}=-3$

e) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}=\sqrt{16}=4$

f) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+1=2$

g) $\lim_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ no existe, ya que la raíz está definida sólo si $x\in[-3,\,3]$.

h) $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$

i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$

j) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

k) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9}=\lim_{x\to 9}(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)=114$

l) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=\frac{-2}{-1}=2$

Cuestión 23:

Si existen, halla los siguientes límites en la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2} & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } 1\le x<4\\ \sqrt{x}+x+1 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$

a) $\lim_{x\to 0}f(x)$

b) $\lim_{x\to 1}f(x)$

c) $\lim_{x\to 1^-}f(x)$

d) $\lim_{x\to 1^+}f(x)$

e) $\lim_{x\to 3}f(x)$

f) $\lim_{x\to 4^+}f(x)$

g) $\lim_{x\to 4^-}f(x)$

h) $\lim_{x\to 4}f(x)$

i) $\lim_{x\to 5}f(x)$

a) $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-2}=0$

b) $\lim_{x\to 1}f(x)$ no existe, pues no coinciden los límites laterales.

c) $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-2}=-1$

d) $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x-1)=1$

e) $\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}(2x-1)=5$

f) $\lim_{x\to 4^+}f(x)=\lim_{x\to 4^+}(\sqrt{x}+x+1)=7$

g) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (2x-1) = 7$

h) $\lim_{x\to 4} f(x) = 7$, pues $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 7$

i) $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}(\sqrt{x} + x + 1) = 6 + \sqrt{5}$

Cuestión 24:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim\limits_{b\to 0} \dfrac{3b^3 - 2b^2}{b}$ d) $\lim\limits_{b\to 0} \dfrac{b^2 - 7b}{4b}$

Saca factor común y simplifica cada fracción.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x(x-2)} = -2$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(2x+3)}{x} = 3$

c) $\lim\limits_{b\to 0} \dfrac{b^2(3b-2)}{b} = 0$ d) $\lim\limits_{b\to 0} \dfrac{b(b-7)}{4b} = -\dfrac{7}{4}$

Cuestión 25:

Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \dfrac{3}{-1} = -3$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\dfrac{1}{4}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = 2$

Cuestión 26:

Calcula el límite de la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-5}$ en $x=2$ y en $x=5$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to 5} f(x)\to \frac{24}{0} \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 5} f(x).$$

Cuestión 27:

Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x^3+8}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-3x+2} \to \dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)^2}{(x-1)(x-2)}=0$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x^3+8} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^4-16}{x^3+8}=\lim_{x\to -2} \frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=-\frac{8}{3}$$

Cuestión 28:

Pon un ejemplo de una función que tenga como asíntotas verticales las rectas cuyas ecuaciones son:

$$x=1 \qquad x=2 \qquad x=3$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

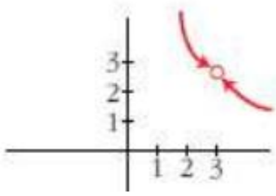
Cuestión 29:

Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

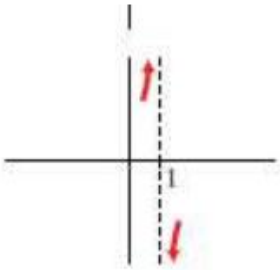
a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)}=\dfrac{5}{3}$



b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)\,(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x-1}$



Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-2}{x-1} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-2}{x-1} = -\infty$

No existe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

Cuestión 30: Calcula los siguientes límites:

a.- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{4x-1}}$	Sol: 1/2	b.- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{3x^2 - x + 1}}{\sqrt{4x-1}}$	Sol: 0
c.- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4-x}}{x^{\frac{1}{3}}}$	Sol: $-\infty$	d.- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x}{5x^2 - x + 1}$	Sol: $+\infty$
e.- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$	Sol:3/2	f.- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right)$	Sol:0
g.- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x - \sqrt{x^2 + 3x}}$	Sol: $+\infty$	h.- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$	Sol:0
i.- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+2} - 4}$	Sol:1	j.- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$	Sol:-1
k.- $\lim\limits_{x \to 5} \left(\sqrt[3]{x^2+2} - x\right)$	Sol:-2	l.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 5x}{x^4 - x^3 + x - 1}$	Sol:-2

m.- $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$	Sol: $-\infty$	n.- $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$	Sol:-2
ñ.- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3 + 4x^2 - 11x - 2}$	Sol:9/17	o.- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3} - 1}$	Sol:2

p.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \lvert x \rvert}{2x}$	Sol:0	q.- $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(\dfrac{x-1}{2x-4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol: $e^{\frac{-1}{2}}$
r.- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 1}{2x^2 - 4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol:1	s.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1-x}{3x^4 + 1}\right)^{\frac{-1}{x}}$	Sol:e
t.- $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(2 - \dfrac{x-1}{2x-4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol : $\sqrt{e}$	u.- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\right)^{2x-3}$	Sol : 1

v.- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)^x$	Sol : $\dfrac{\sqrt{e}}{e}$	x.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$	Sol : -1
y.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^2-2\lvert x-1\rvert-1}$	Sol : 1/3	z.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{3x^4+1}\right)^{\frac{-1}{x}}$	Sol :e

Cuestión 31:

Encuentra el valor de:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{4x^2-3}}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-2x+4}}=0$$

Cuestión 32:

Obtén los resultados de:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}=0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}=-\infty$

Cuestión 33:

Determina.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+\sqrt{x+4}}=-\frac{1}{4}$$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Cuestión 34:

Halla los límites.

a) $\lim_{x \to \pi} \cos x$ b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg\, x$ c) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} sen\, x$ d) $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{sen\, x}$

a) $\lim_{x \to \pi} \cos x = -1$

b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg\, x \to \frac{1}{0}$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg\, x = +\infty$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tg\, x = -\infty$

c) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} sen\, x = -1$

d) $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{sen\, x} \to -\frac{1}{0}$ $\lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{sen\, x} = -\infty$ $\lim_{x \to \pi^+} \frac{\cos x}{sen\, x} = +\infty$

Cuestión 35:

Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$$

determina los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ c) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ d) $\lim_{x \to -2} f(x)$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \to -2} f(x) \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(2x - 1)}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \to -2} \frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{5}{4}$$

Cuestión 36: Calcula:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x})=\infty-\infty$$

SOL:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})\right]}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2-x^2-x}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-x}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})}=$$

$$=\frac{-1}{2}$$

Cuestión 37:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x \quad\Rightarrow\quad \ldots\ \infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

Cuestión 38:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2} \quad\Rightarrow\quad \ldots\ \infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{4}{\infty}=0$$