EJERCICIOS RESUELTOS

UNIDAD 14: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Ejercicio 1:

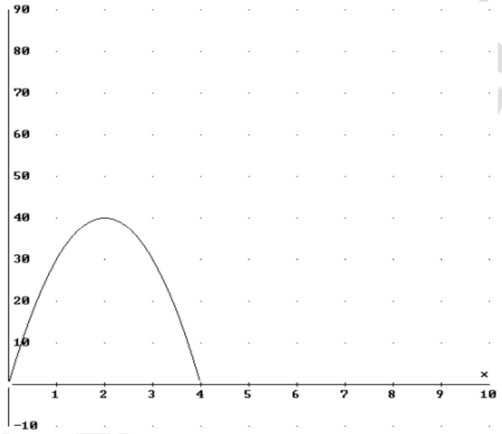
La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión:

$$T(t) = 40t - 10t^2 \quad con \quad 0 \le t \le 4$$

a) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

b) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora?. ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?.

a)



La temperatura máxima es 40º C.

b) 30º C. Si para $t = 3$.

Ejercicio 2:

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{si} \quad x \le 3 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}.$$

b) Calcule la derivada de $g(x) = (x+1) \cdot e^{2x+1}$

a) La función $x^2 - 4x + 7$ es continua y derivable para $x < 3$; la función $\dfrac{4}{x-2}$ es, también, continua y derivable para $x > 3$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 4x + 7) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{4}{x-2} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) = 4 \Rightarrow \text{Continua en } x = 3$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & si \quad x < 3 \\ \dfrac{-4}{(x-2)^2} & si \quad x > 3 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 2 \\ f'(3^+) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3^-) \ne f'(3^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 3$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$

b)

$$g'(x) = 1 \cdot e^{2x+1} + 2 \cdot e^{2x+1} \cdot (x+1) = (2x+3) \cdot e^{2x+1}$$

Ejercicio 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.

b) Calcule sus asíntotas.

c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 2$

a) La función 2^x es continua y derivable para $x<1$; la función $\frac{2}{x}$ es, también, continua y derivable para $x>1$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} 2^x = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2^x\cdot \ln 2 & si \quad x<1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & si \quad x>1\end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=2\cdot \ln 2 \\ f'(1^+)=-2\end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=1$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

b) La función *f(x)* no tiene asíntota vertical.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es asíntota horizontal}$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$.

c) La recta tangente en $x=2$ es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$$f(2)=\frac{2}{2}=1$$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=-\frac{1}{2}\cdot(x-2) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$

<u>Ejercicio 4</u>:

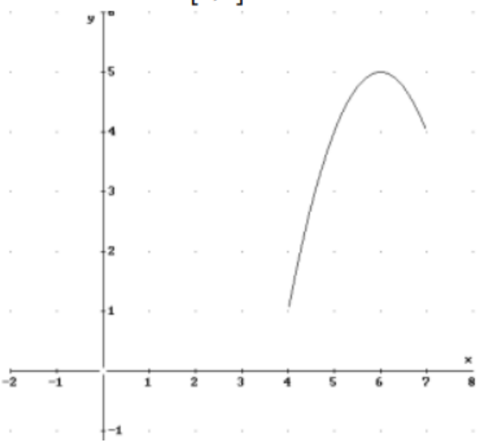
El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por:

$$\boldsymbol{f(t)=-t^2+12t-31 \qquad 4\le t\le 7}$$

a) Represente la gráfica de la función *f*.

b) ¿Para qué valor de *t* alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende?. ¿Para qué valor de *t* alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?.

a) Representamos la parábola en el intervalo $[4,7]$



b) Calculamos la derivada de la función:

$$f'(t) = -2t + 12\ ;\ f'(t) = 0 \Rightarrow -2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 6$$

	(4,6)	(6,7)
Signo $f'(t)$	+	—
Función $f(t)$	C	D

$\downarrow$

Máximo (6,5)

Luego, el máximo está en $x = 6$ y es 5 millones de € y el mínimo en $x = 4$ y es 1 millón de €

Ejercicio 5:

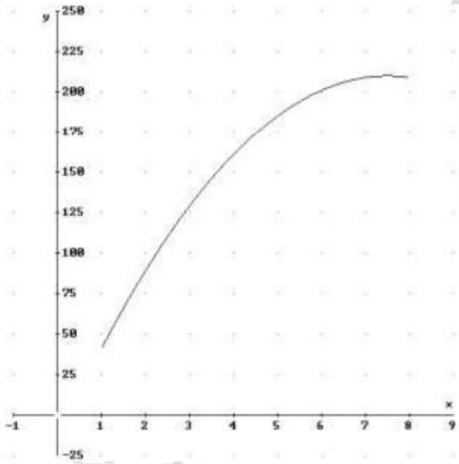
El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo *t*, en años, viene dado por la función: $f(t) = -4t^2 + 60t - 15 \qquad 1 \le t \le 8$

a) ¿Cuál será el valor de las existencias para $t = 2$? ¿Y para $t = 4$?.

b) ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En que instante se alcanza?.

c) ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

a)



a)

$$t = 2 \Rightarrow f(2) = -4 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 - 15 = 89.000$$

$$t = 4 \Rightarrow f(2) = -4 \cdot 4^2 + 60 \cdot 4 - 15 = 161.000$$

b)

$$f'(t) = -8t + 60 = 0 \Rightarrow t = 7'5 \Rightarrow f(7'5) = 210.000$$

c)

$$185 = -4 \cdot t^2 + 60 \cdot t - 15 \Rightarrow 4t^2 - 60t + 200 = 0 \Rightarrow t = 5$$

Ejercicio 6:

a) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto $(1, -3)$ y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.

b) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

a) Calculamos $f''(x)$.

$$f(x)=ax^3+3x^2-5x+b \Rightarrow f'(x)=3ax^2+6x-5 \Rightarrow f''(x)=6ax+6$$

$$\left.\begin{array}{l} Pasa\ por\,(1,-3) \Rightarrow f(1)=-3 \Rightarrow a+3-5+b=-3 \Rightarrow a+b=-1 \\ P.I.\,en\,x=-1 \Rightarrow f''(-1)=0 \Rightarrow -6a+6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1; b=-2$$

b) Calculamos la derivada de la función:

$$g'(x)=3x^2-6x\ ;\ g'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0\ y\ 2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo $g'(x)$	+	–	+
Función $g(x)$	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,7)$ $\quad\downarrow$ mínimo $(2,3)$

Ejercicio 7:

Sea la función *f* definida por: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & si\ \ x\le 0 \\ x^2+x & si\ \ x>0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f*.

b) Calcule la ecuación la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

a) La función $\dfrac{x}{2x-1}$ es continua y derivable para $x\le 0$; la función x^2+x es, también, continua y derivable para $x>0$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{2x-1}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(2x-1)^2} & si\ \ x<0 \\ 2x+1 & si\ \ x>0 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=0$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=1^2+1=2$$

$$f'(x)=2x+1 \Rightarrow f'(1)=3$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=3\cdot(x-1) \Rightarrow y=3x-1$

Ejercicio 8:

Consideremos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ \ x\le 1 \\ x-1 & si\ \ x>1 \end{cases}$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine la monotonía de *f*.

c) Represente gráficamente esta función.

a) La función x^2-1 es continua y derivable para $x<1$; la función $x-1$ es, también, continua y derivable para $x>1$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=0 \Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x & si\ \ x<1 \\ 1 & si\ \ x>1 \end{cases}$ y como:

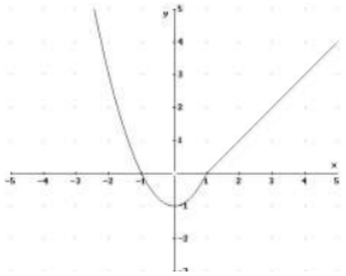
$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=2 \\ f'(1^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\ne f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=1$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

b) $f'(x)=2x=0 \Rightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	$-$	$+$	$+$
Función	D	C	C

c)



Ejercicio 9:

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ en el punto de abscisa $x=1$.
b) Se considera la función $f(x)=ax^2-bx+4$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1, 10).

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)$

$$g(1)=\frac{1}{2}$$
$$g'(x)=\frac{3\cdot(x+1)-1\cdot(3x-2)}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(1)=\frac{5}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}\cdot(x-1) \Rightarrow 5x-4y-3=0$

b) Calculamos la derivada de $f(x)=ax^2-bx+4$.

$$f'(x)=2ax-b$$

Pasa por $(1,10) \Rightarrow f(1)=10 \Rightarrow a-b+4=10$

Extremo relativo en $(1,10) \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a-b=0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale: $a=-6$; $b=-12$

Ejercicio 10:

Sea la función $f(x)=x^3-3x^2-1$
a) Determine la monotonía y los extremos relativos de f.
b) Calcule su punto de inflexión.
c) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, represéntela.

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0 \ ; \ x=2$$

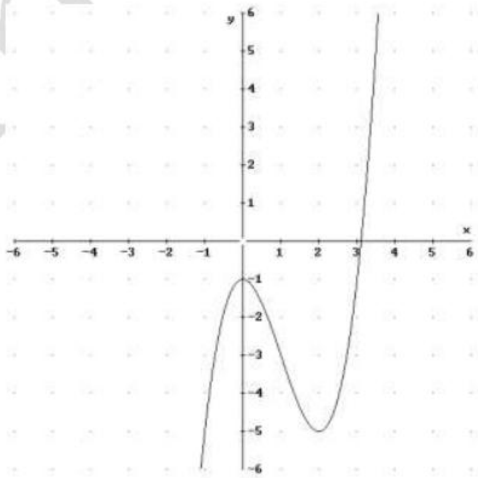
	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	$+$	$-$	$+$
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,-1)$ $\quad$ $\downarrow$ mínimo $(2,-5)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ El punto de inflexión está en $(1, -3)$

c) Hacemos la representación gráfica.



Ejercicio 11:

a) Dada la función $f(x) = a \cdot (x-1)^2 + bx$, calcule a y b para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas $(1,2)$ y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Calcule $g''(2)$ siendo $g(x) = \dfrac{1}{x} - x$.

a) Calculamos la derivada de $f(x) = a \cdot (x-1)^2 + bx$.

$$f'(x) = 2a(x-1) + b$$

Pasa por $(1,2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow b = 2$

Extremo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$

b) Calculamos la segunda derivada de $g(x) = \dfrac{1}{x} - x$

$g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 1$

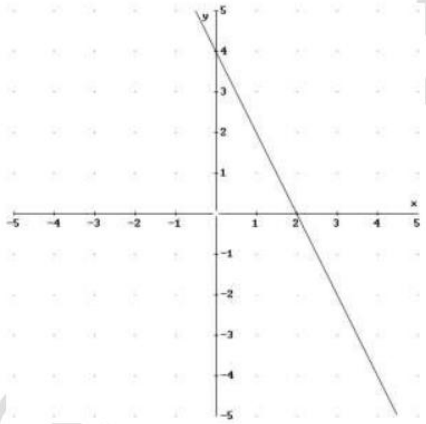
$g''(x) = \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow g''(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Ejercicio 12:

a) De una función f se sabe que la gráfica de su función derivada, f', es la recta de ecuación $y = -2x + 4$. Estudie razonadamente la monotonía de la función f, a la vista de la gráfica de la derivada.

b) Dada la función $g(x) = \dfrac{4x-4}{x+4}$, calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-\infty,2)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(2,\infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

b) La recta tangente en $x=0$ es $y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0)$

$$g(0)=-1$$
$$g'(x)=\frac{4\cdot(x+4)-1\cdot(4x-4)}{(x+4)^2}\Rightarrow g'(0)=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$$

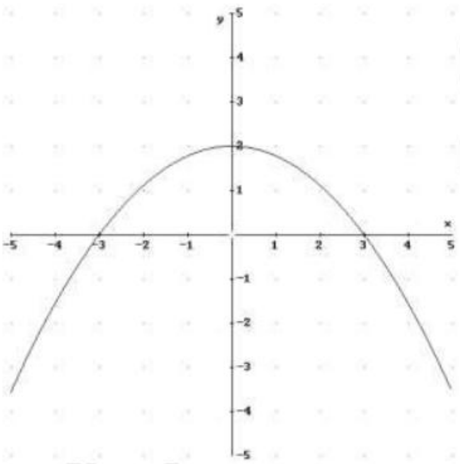
Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+1=\frac{5}{\cdot}\cdot(x-0)\Rightarrow 5x-4y-4=0$ <

<u>Ejercicio 13</u>:

a) La gráfica de la función derivada de una función *f* es la parábola de vértice $(0,2)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$. A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

b) Calcule los extremos relativos de la función $g(x)=x^3-3x$.

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-3,3)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \ ; \ x = -1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Signo g'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(-1,2)$ $\downarrow$ mínimo $(1,-2)$

Ejercicio 14:

Se considera la función $f(x)=\dfrac{3-x}{2-x}$

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x=1$.
b) Estudie su monotonía.
c) Calcule sus asíntotas.

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=\frac{2}{1}=2$$
$$f'(x)=\frac{-1\cdot(2-x)-(-1)\cdot(3-x)}{(2-x)^2} \Rightarrow f'(1)=1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=1\cdot(x-1) \Rightarrow x-y+1=0$

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{-1\cdot(2-x)-(-1)\cdot(3-x)}{(2-x)^2}=\frac{1}{(2-x)^2}=0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
Signo f'	+	+
Función	C	C

Luego la función es creciente en su dominio.

c) *Verticales*: La recta $x=a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=\infty \Rightarrow x=2$$

Horizontales: La recta $y=b$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{2-x}=1 \Rightarrow y=1$$

Ejercicio 15:

Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$

a) Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de *f* y su curvatura.

b) Represente gráficamente la función *f*.

a) Corte eje X $\Rightarrow y=0 \Rightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$

Luego, corta en el eje X en los puntos: $(0,0)$; $(1,0)$; $(2,0)$

Corte eje Y $\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=3x^2-6x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

	$\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	−+	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$.

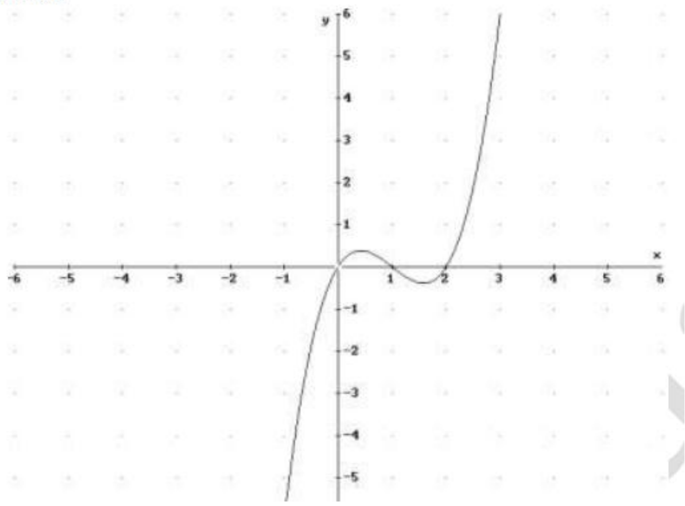
Tiene un máximo relativo en $(0'42,0'39)$ y un mínimo relativo en $(1'57,-0'38)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=6x-6=0 \Rightarrow x=1$

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
Signo $f''(x)$	−	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava $(-\infty,1)$ y convexa en $(1,\infty)$.

b) Dibujamos la función



Ejercicio 16:

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x=0$

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{-3x+7} \qquad g(x)=\ln\left(\frac{1}{3x+1}\right)$$

a) La ecuación de la tangente en $x=0$ es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=-\frac{2}{7}$$

$$f'(x)=\frac{(6x+5)(-3x+7)-(-3)(3x^2+5x-2)}{(-3x+7)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{29}{49}$$

Sustituyendo, tenemos que: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y+\frac{2}{7}=\frac{29}{49}x\Rightarrow y=\frac{29}{49}x-\frac{2}{7}$

La ecuación de la tangente en $x=0$ es: $y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0)$

$$g(0)=0$$

$$g'(x)=\frac{\frac{-3}{(3x+1)^2}}{\frac{1}{3x+1}}\Rightarrow g'(0)=-3$$

Sustituyendo, tenemos que: $y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y=-3x$

Ejercicio 17:

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-3 & si \quad x\le 1 \\ 1+\dfrac{1}{x-2} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de *f*. Si la función no es continua en algún punto, indique el tipo de discontinuidad que presenta.

b) Estudie la derivabilidad de *f*.

c) Determine las asíntotas de *f*.

a) La función x^3+2x^2-3 al ser polinómica es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $1+\frac{1}{x-2}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$. Estudiamos la continuidad en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+2x^2-3\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)=0\Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$. En $x=2$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{array}\right\}$$

b) Vamos a estudiar la derivabilidad en $x=1$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2+4x & si \quad x<1 \\ \dfrac{-1}{(x-2)^2} & si \quad x>1 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=7 \\ f'(1^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=1$$

Por lo tanto, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{1 \ y \ 2\}$

c) La función polinómica x^3+2x^2-3 no tiene asíntotas. Calculamos las asíntotas de la función $f(x)=1+\dfrac{1}{x-2}$ para $x>1$

Asíntota vertical $x=2$, ya que $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{array}\right\}$

Asíntota horizontal $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x-2}=1+\dfrac{1}{\infty}=1 \Rightarrow y=1$

Ejercicio 18:

La temperatura en el interior de un equipo de refrigeración durante un día que sufrió un corte de energía viene dada por la función *f* expresada en grados centígrados y el tiempo *t* en horas:

$$f(t)=\begin{cases} -9 & si \quad 0\leq t\leq 1 \\ -t^2+12t-20 & si \quad 1<t<11 \\ -9 & si \quad 11\leq t\leq 24 \end{cases}$$

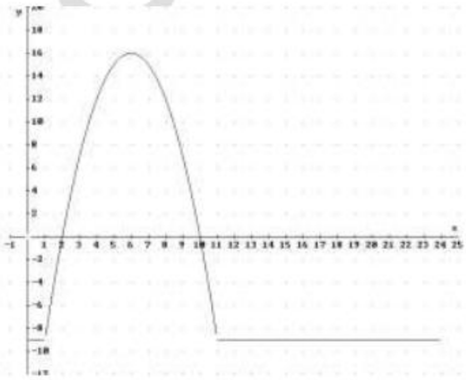
a) Estudie la continuidad de *f*.
b) Represente gráficamente la función.
c) Conteste razonadamente a qué hora se produjo el corte de energía y cuánto duró dicho corte.
d) El equipo de refrigeración se utiliza para conservar sueros y vacunas. Los sueros se estropean si se alcanzan temperaturas de 20ºC en algún momento. Las vacunas se estropean si están por encima de 0ºC durante más de seis horas. Razone si alguno de esos productos se estropeó ese día.

a) Estudiamos la continuidad en $t=1$ y en $t=11$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 1^-}(-9)=-9 \\ \lim\limits_{t\to 1^+}(-t^2+12t-20)=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{t\to 1} f(t)=-9 \Rightarrow \text{Continua en } t=1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 11^-}(-t^2+12t-20)=-9 \\ \lim\limits_{t\to 11^+}(-9)=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow f(11)=\lim_{t\to 11} f(t)=-9 \Rightarrow \text{Continua en } t=11$$

b)



c) La temperatura comenzó a aumentar a partir de la hora 1 hasta la hora 6 que llegó a 16ºC. Después comenzó a disminuir hasta la hora 11 que llegó a – 9ºC y así se mantuvo hasta la hora 24. El equipo de refrigeración dejó de funcionar en la hora 1 hasta la hora 6. Luego, estuvo sin funcionar 5 horas.

d) Los sueros no se estropearon ya que nunca se alcanzó la temperatura de 20ºC. La temperatura estuvo por encima de 0ºC desde la hora 2 hasta la hora 10, es decir, 8 horas, por lo tanto, las vacunas si se estropearon.

Ejercicio 19:

a) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+6 & si \quad x\leq 2'5 \\ -1'4x+7 & si \quad x>2'5 \end{cases}$

con *a* y *b* números reales. Calcule el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua y tenga un máximo en $x=1$.

a) Como es continua en $x=2'5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2'5^-}\left(ax^2+bx+6\right)=6'25a+2'5b+6 \\ \lim\limits_{x\to 2'5^+}\left(-1'4x+7\right)=-3'5+7=3'5 \end{array}\right\}\Rightarrow 6'25a+2'5b=-2'5$$

Máximo en $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow f'(x)=2ax+b\Rightarrow 2a+b=0$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 6'25a+2'5b=-2'5 \\ 2a+b=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-2 \ ; \ b=4$

Ejercicio 20:

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & si \quad 0\leq x\leq 2 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f*.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo de la función y represente gráficamente la función.

a) Estudiamos la continuidad en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=\dfrac{4}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\frac{4}{3}\Rightarrow \text{Continua en } x=2$$

Calculamos la derivada $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3} & si \quad 0\le x<2\\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & si \quad x>2\end{cases}$

Como $f'(2^-)=\frac{4}{3}\neq f'(2^+)=-\frac{4}{9}\Rightarrow$ No es derivable en $x=2$

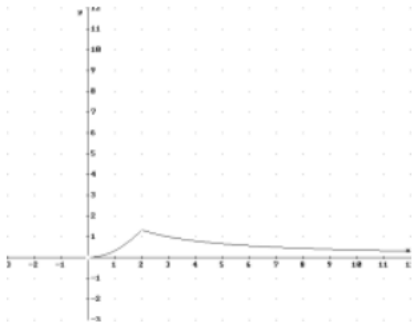
b) Igualamos la derivada a cero $\frac{2x}{3}=0\Rightarrow x=0$; $\frac{-4}{(x+1)^2}=0\Rightarrow$ No tiene solución

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−
Función	C	D

La función es decreciente en $(2,+\infty)$ y creciente en $(0,2)$.

Tiene un máximo relativo (Pico) en $\left(2,\frac{4}{3}\right)$

Dibujamos la función.



Ejercicio 21:

Se considera la función $f(x)=x^3-9x+2$

a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función que sean paralelas a la recta $y=3x-3$

b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f

a) Como tiene que ser paralela a la recta $y=3x-3$, la pendiente vale 3, luego: $f'(x)=3$

$$f'(x)=3\Rightarrow 3x^2-9=3\Rightarrow 3x^2=12\Rightarrow x=\pm 2$$

La ecuación de la tangente en $x=2$ es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$f(2)=2^3-9\cdot 2+2=-8$ $\qquad\qquad$ $f'(2)=3$

Sustituyendo, tenemos que: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y+8=3\cdot(x-2)\Rightarrow y=3x-14$

La ecuación de la tangente en $x=-2$ es: $y-f(-2)=f'(-2)\cdot(x+2)$

$f(-2)=(-2)^3-9\cdot(-2)+2=12$ $\qquad\qquad$ $f'(-2)=3$

Sustituyendo, tenemos que: $y-f(-2)=f'(-2)\cdot(x+2)\Rightarrow y-12=3\cdot(x+2)\Rightarrow y=3x+18$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=3x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$	$\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

Creciente: $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$; Decreciente: $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\sqrt{3}\,,6\sqrt{3}+2\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\sqrt{3}\,,-6\sqrt{3}+2\right)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$

	$\left(-\infty,0\right)$	$\left(0,+\infty\right)$
Signo $f''(x)$	−	+
Función	Cn	Cx

Cóncava: $\left(-\infty,0\right)$; Convexa: $\left(0,+\infty\right)$; Tiene un punto de inflexión en $\left(0,2\right)$.

Ejercicio 22:

Sea $f(t)$ el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo *t*, medido en meses, transcurridos desde su inauguración:

$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{5}{2}t^2+20t & \text{si } 0\le t\le 6\\ \dfrac{90t-240}{t+4} & si \quad t>6\end{cases}.$$

a) ¿Evoluciona la función *f* de forma continua?.
b) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?.
c) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40 %?.
d) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

a) La función polinómica $-\dfrac{5}{2}t^2+20t$ es continua en $\mathbb{R}$. La función racional $\dfrac{90t-240}{t+4}$ es continua en $\mathbb{R}-\left(-4\right)$.Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x=6$.

Estudiamos la continuidad en $x=6$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 6^-} -\dfrac{5}{2}t^2+20t=30\\ \lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{90t-240}{t+4}=30\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 6^-}=\lim\limits_{x\to 6^+}=f(6)\Rightarrow \text{ Es continua en } x=6$$

Por lo tanto, la función es continua en el intervalo $\left[0,+\infty\right)$

b) Calculamos: $f(24)=\dfrac{90\cdot 24-240}{24+4}=\dfrac{1920}{28}=68'57$

Luego, al finalizar el segundo año, la ocupación sería del 68'57 %

c) Calculamos $f(t)=40$

$$-\frac{5}{2}t^2+20t=40\Rightarrow -5t^2+40t-80=0\Rightarrow t=4$$

$$\frac{90t-240}{t+4}=40\Rightarrow 90t-240=40t+160\Rightarrow t=8$$

Luego, la ocupación hotelera es del 40 % en el mes 4 y en el mes 8

d) Calculamos si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{90t-240}{t+4}=\frac{\infty}{\infty}=90\Rightarrow y=90$$

Luego, el porcentaje de ocupación no llegaría al 90 % aunque estuviese abierto indefinidamente.

Ejercicio 23:

a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{e^{5x}-x}{x^2-x}\qquad g(x)=(2x^2-x)^3\cdot\ln(x^3+2)$$

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x=1$.

a)

$$f'(x)=\frac{(5\cdot e^{5x}-1)\cdot(x^2-x)-(2x-1)\cdot(e^{5x}-x)}{\left(x^2-x\right)^2}$$

$$g'(x)=3\cdot(2x^2-x)^2\cdot(4x-1)\cdot\ln(x^3+2)+\frac{3x^2}{x^3+2}\cdot(2x^2-x)^3$$

b) La recta tangente en $x=1$ es $y-h(1)=h'(1)\cdot(x-1)$

- $h(1)=\dfrac{1}{1}=$
- $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow h'(1)=-1$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x+2$

Ejercicio 24:

En una especie animal la contracción del iris, en décimas de milímetro, después de exponer el ojo a una luz brillante durante un determinado tiempo, viene dada por

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & si\quad 0\le t\le 2\\ \dfrac{4}{t-1} & si\quad t>2\end{cases}$$

donde *t* es el tiempo, en segundos, que transcurre desde que se concentra la luz en el ojo.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función *f*.

b) Represente gráficamente la función *f*, determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas, en caso de que existan.

c) Determine en qué instante se obtiene la máxima contracción y su valor.

a) La función t^2 es continua y derivable para $0 \le t \le 2$; la función $\frac{4}{t-1}$ es, también, continua y derivable para $t > 2$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $t = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} t^2 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{4}{t-1} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 \Rightarrow \text{Continua en } t = 2$$

Calculamos la función derivada: $f'(t) = \begin{cases} 2t & si \quad 0 \le t < 2 \\ \frac{-4}{(t-1)^2} & si \quad t > 2 \end{cases}$ y como:

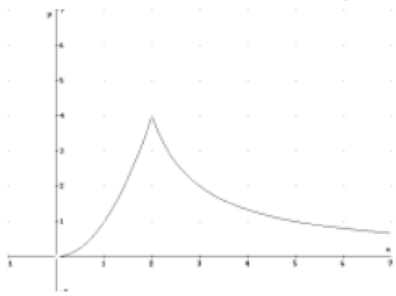
$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 \\ f'(2^+) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-) \ne f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } t = 2$$

Luego la función $f(t)$ es continua en $[0, +\infty)$ y derivable en $[0, +\infty) - \{2\}$.

b) Igualamos la primera derivada a cero: $2t = 0 \Rightarrow t = 0$; $\frac{-4}{(t-1)^2} = 0 \Rightarrow$ No

	$[0,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(t)$	+	−
Función	C	D

Asíntota vertical y oblicua no tiene. Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{t-1} = \frac{4}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$



c) La máxima contracción se obtiene para $t = 2$ y vale 4

Ejercicio 25:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4} & si \quad x \le 0 \\ x+3 & si \quad 0 < x < 2 \\ x^2 + 1 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de la función en su dominio y clasifique sus discontinuidades, en caso de que exista alguna.
b) Estudie la derivabilidad de la función en su dominio.

a) La función $\frac{1}{x-4}$ es continua y derivable para $x \le 0$; la función $x+3$ es, también, continua y derivable para $0 < x < 2$; la función x^2+1 es, también, continua y derivable para $x \ge 2$;. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 0$ y $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x+3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow \text{Discontinua inevitable de salto finito}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} x+3 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x^2+1 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \text{Continua en } x = 2$$

b) En $x=0$ no es derivable ya que no es continua. Estudiamos la derivabilidad en $x=2$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(x-4)^2} & si \;\; x<0 \\ 1 & si \;\; 0<x<2 \\ 2x & si \;\; x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=1 \\ f'(2^+)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=2$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\, y\, 2\}$.

Ejercicio 26:

a) Calcule los valores de los parámetros a y b para que la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ presente un extremo relativo en el punto $(2,6)$.
b) Para $a=1$ y $b=1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x=1$.

a) Calculamos la derivada de la función: $f(x)=x^3+ax^2+b \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax$

- Extremo en $(2,6) \Rightarrow \begin{cases} f(2)=6 \Rightarrow 8+4a+b=6 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 12+4a=0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema sale que: $a=-3$; $b=10$

b) La función es: $f(x)=x^3+x^2+1$. La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$f(1)=3$

$f'(x)=3x^2+2x \Rightarrow f'(1)=5$

Sustituyendo, tenemos: $y-3=5\cdot(x-1) \Rightarrow y=5x-2$

Ejercicio 27:

El beneficio en euros que obtiene una empresa al vender x unidades de un artículo viene dado por la función $B(x)=-x^2+360x-18000 \quad 50\leq x\leq 350$.
a) ¿Cuál es el beneficio obtenido si vende 100 unidades? ¿Cuántas unidades debe vender para obtener un beneficio de 13500 €?
b) ¿Cuál es el número de unidades que debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?
c) Represente gráficamente la función y determine cuántas unidades hay que vender para no obtener pérdidas.

a) Si $x=100 \Rightarrow B(x)=-100^2+360\cdot 100-18000=8000$ €

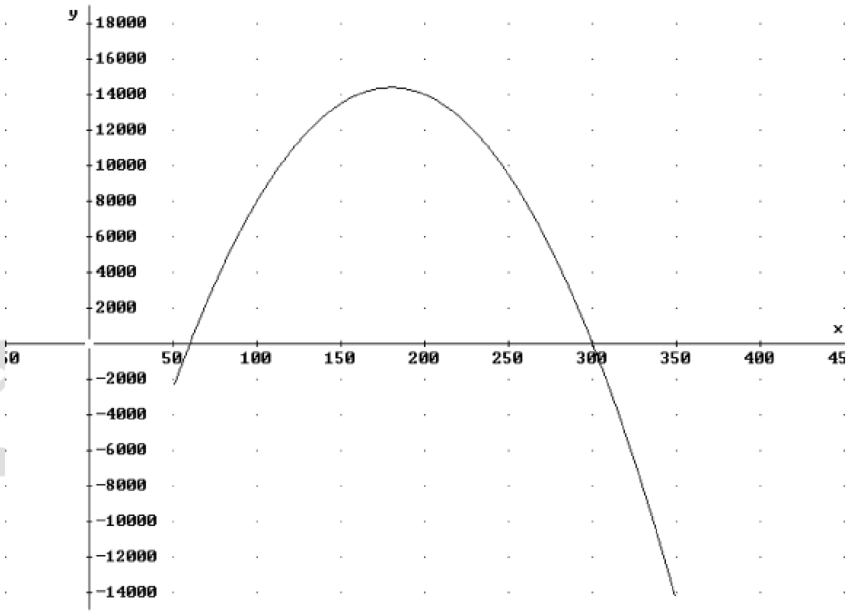
$13500=-x^2+360x-18000 \Rightarrow x^2 360x+31500=0 \Rightarrow x=210 \;\; x=150$

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero

$$B'(x)=-2x+360=0 \Rightarrow x=180$$

$$x=180 \Rightarrow B(x)=-180^2+360\cdot 180-18000=14400 \text{ €}$$

c)



$$B(x) = -x^2 + 360x - 18000 = 0 \Rightarrow x = 60 \;\; ; \; x = 300$$

Debe vender más de 60 unidades y menos de 300 unidades

Ejercicio 28:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax - 3x^2 & si \quad x \le 1 \\ 2x^2 + b & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) Calcule los valores de a y b para que la función f sea derivable en $x = 1$.

b) Para $a = 3$ y $b = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f.

a) Si la función es derivable en $x = 1$, entonces es continua en $x = 1$. Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} ax - 3x^2 = a - 3 \\ \lim_{x \to 1^+} 2x^2 + b = 2 + b \end{array} \right\} \Rightarrow a - 3 = 2 + b \Rightarrow a - b = 5$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 1$. Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} a - 6x & si \quad x < 1 \\ 4x & si \quad x > 1 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = a - 6 \\ f'(1^+) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a - 6 = 4 \Rightarrow a = 10$$

Luego, tenemos que: $a = 10$ y $b = 5$

b) La función es: $f(x)=\begin{cases} 3x-3x^2 & si \quad x\le 1 \\ 2x^2-2 & si \quad x>1 \end{cases}$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\begin{cases} 3-6x & si \quad x<1 \\ 4x & si \quad x>1 \end{cases}$

$3-6x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$. ; $4x=0 \Rightarrow x=0$

	$(-\infty,\frac{1}{2})$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	–	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$. Decreciente en $\left(\frac{1}{2},1\right)$ y tiene un máximo en $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=\begin{cases} -6 & si \quad x<1 \\ 4 & si \quad x>1 \end{cases}$

No hay ningún valor que anule la segunda derivada

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	–	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-\infty,1)$. Convexa $(1,+\infty)$ y tiene un punto de inflexión en $(1,0)$

Ejercicio 29:

Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$

a) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x=-1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-2$.

b) Para $a=6$ y $b=9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

a) Calculamos la primera y segunda derivada

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \quad ; \quad f'(x)=3x^2+2ax+b \quad ; \quad f''(x)=6x+2a$$

- Mínimo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+b=0 \Rightarrow -2a+b=-3$

- Punto de inflexión en $x=-2 \Rightarrow f''(-2)=0 \Rightarrow 6\cdot(-2)+2a=0 \Rightarrow 2a=12$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a=6$; $b=9$

b) Corte con el eje X $\Rightarrow x^3+6x^2+9x=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=-3 \Rightarrow (0,0)\ ;\ (-3,0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=3x^2+12x+9=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=-3$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,\infty)$
Signo y'	+	—	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(-3,0)$ $\quad$ $\downarrow$ mínimo $(-1,-4)$

Hacemos la representación gráfica.