

**EJERCICIOS RESUELTOS**  
**UNIDAD 7: TRIGONOMETRÍA II**

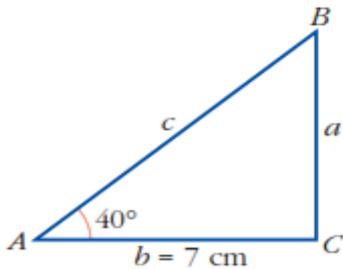
Contenido

1. EJERCICIOS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS .....	2
2. EJERCICIOS DE SUMA, DIFERENCIA DE ÁNGULOS, ÁNGULO DOBLE Y MITAD .....	6
3. EJERCICIOS DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS .....	14
4. EJERCICIOS DE TRIÁNGULOS (TEOREMAS DEL SENO Y COSENO) .....	17
5. EJERCICIOS DE ECUACIONES Y SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOS .....	29

## 1. EJERCICIOS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

**Cuestión 1:**

Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de  $40^\circ$ . ¿Cuánto mide el poste?



$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7 \operatorname{tg} 40^\circ = 5,87 \text{ m}$$

**Cuestión 2:**

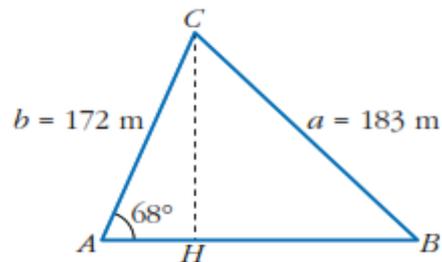
En un triángulo  $ABC$  conocemos  $\hat{A} = 68^\circ$ ,  $b = 172 \text{ m}$  y  $a = 183 \text{ m}$ . Calcula la longitud del lado  $c$ .

$$\overline{AH} = 172 \cos 68^\circ = 64,43 \text{ m}$$

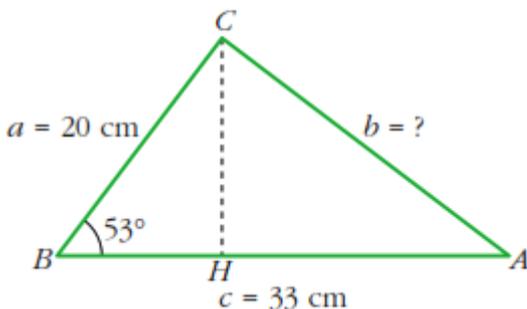
$$\overline{CH} = 172 \operatorname{sen} 68^\circ = 159,48 \text{ m}$$

$$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89,75 \text{ m}$$

$$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64,43 \text{ m} + 89,75 \text{ m} = 154,18 \text{ m}$$

**Cuestión 3:**

En un triángulo  $ABC$  conocemos  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $c = 33 \text{ cm}$  y  $\hat{B} = 53^\circ$ . Calcula la longitud del lado  $b$ .



$$\overline{BH} = a \cos 53^\circ = 12,04 \text{ cm}$$

$$\overline{CH} = a \operatorname{sen} 53^\circ = 15,97 \text{ cm}$$

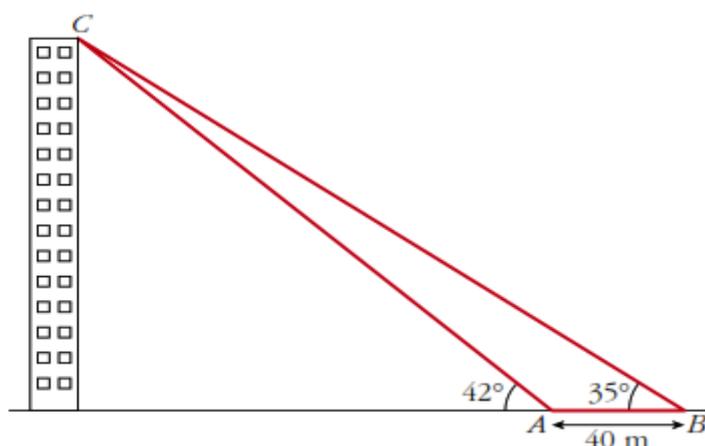
$$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20,96 \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26,35 \text{ cm}$$

**Cuestión 4:**

Estamos en  $A$ , medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio ( $42^\circ$ ), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo ( $35^\circ$ ). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?

Observa la ilustración:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 42^\circ &= \frac{h}{d} \rightarrow h = d \operatorname{tg} 42^\circ \\ \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{d+40} \rightarrow h = (d+40) \operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow d \operatorname{tg} 42^\circ = (d+40) \operatorname{tg} 35^\circ \rightarrow d = \frac{40 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} = 139,90 \text{ m}$$

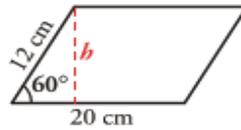
$$h = d \operatorname{tg} 42^\circ = 125,97 \text{ m}$$

La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

### Cuestión 5:

Los lados de un paralelogramo miden 12 y 20 cm, respectivamente, y forman un ángulo de  $60^\circ$ . ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo? ¿Y su área?

**Solución:**



Para hallar la altura hacemos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow h = 12 \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

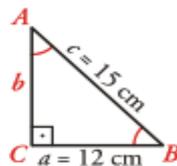
$$\text{El área será } A = 20 \cdot 6\sqrt{3} = 120\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

### Cuestión 6:

En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

**Solución:**

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$12^2 + b^2 = 15^2 \rightarrow 144 + b^2 = 225$$

$$b^2 = 225 - 144 = 81 \rightarrow b = 9 \text{ cm}$$

Hallamos los ángulos:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{9}{15} = 0,6 \rightarrow \hat{B} = 36^\circ 52' 12''$$

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 53^\circ 7' 48''$$

$$\hat{C} = 90^\circ$$

Por tanto:

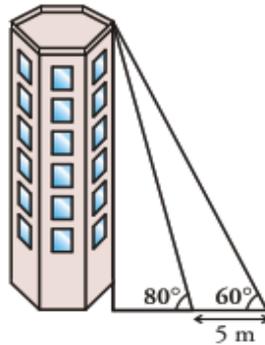
$$a = 12 \text{ cm}; \hat{A} = 53^\circ 7' 48''$$

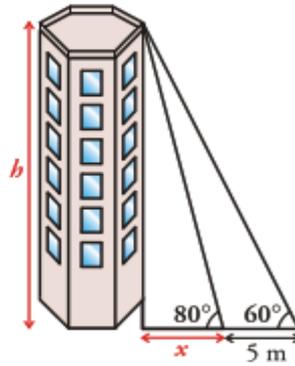
$$b = 9 \text{ cm}; \hat{B} = 36^\circ 52' 12''$$

$$c = 15 \text{ cm}; \hat{C} = 90^\circ$$

### Cuestión 7:

Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de  $60^\circ$ . Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de  $80^\circ$ . Halla la altura de la torre.



**Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 80^{\circ} = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{h}{x+5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} h = x \operatorname{tg} 80^{\circ} \\ h = (x+5) \operatorname{tg} 60^{\circ} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x \operatorname{tg} 80^{\circ} &= (x+5) \operatorname{tg} 60^{\circ} \\ x \operatorname{tg} 80^{\circ} &= x \operatorname{tg} 60^{\circ} + 5 \operatorname{tg} 60^{\circ} \\ x \operatorname{tg} 80^{\circ} - x \operatorname{tg} 60^{\circ} &= 5 \operatorname{tg} 60^{\circ} \\ x(\operatorname{tg} 80^{\circ} - \operatorname{tg} 60^{\circ}) &= 5 \operatorname{tg} 60^{\circ} \end{aligned}$$

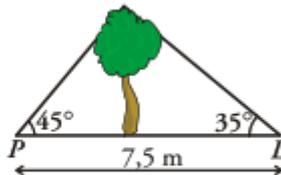
$$x = \frac{5 \operatorname{tg} 60^{\circ}}{\operatorname{tg} 80^{\circ} - \operatorname{tg} 60^{\circ}} = 2,20 \text{ m}$$

$$h = \frac{5 \operatorname{tg} 60^{\circ} \operatorname{tg} 80^{\circ}}{\operatorname{tg} 80^{\circ} - \operatorname{tg} 60^{\circ}} = 12,47 \text{ m}$$

La torre tiene una altura de 12,47 metros.

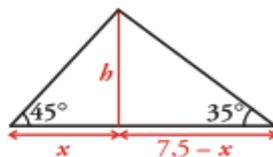
**Cuestión 8:**

Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:



a) Calcula la altura del árbol.

b) ¿A qué distancia está Pablo del árbol?

**Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{7,5-x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 = \frac{h}{x} \rightarrow x = h \\ \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{7,5-x} \end{array}$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{7,5-h}$$

$$(7,5-h)\operatorname{tg} 35^\circ = h \rightarrow 7,5\operatorname{tg} 35^\circ - h\operatorname{tg} 35^\circ = h$$

$$7,5\operatorname{tg} 35^\circ = h + h\operatorname{tg} 35^\circ \rightarrow 7,5\operatorname{tg} 35^\circ = h(1 + \operatorname{tg} 35^\circ)$$

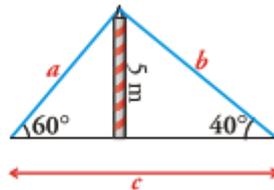
$$h = \frac{7,5\operatorname{tg} 35^\circ}{1 + \operatorname{tg} 35^\circ} = 3,09 \text{ m} = x$$

a) El árbol mide 3,09 metros.

b) Pablo está a 3,09 metros del árbol.

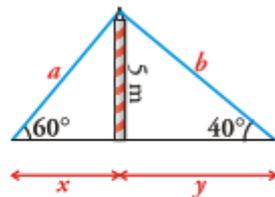
### Cuestión 9:

Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura:



Halla el valor de  $c$  y la longitud del cable.

**Solución:**



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{\operatorname{sen} 60^\circ} = 5,77 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 2,89 \text{ m}$$

Por otra parte, si consideramos el otro triángulo:

$$\operatorname{sen} 40^\circ = \frac{5}{b} \rightarrow b = \frac{5}{\operatorname{sen} 40^\circ} = 7,78 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{5}{y} \rightarrow y = \frac{5}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 5,96 \text{ m}$$

Por tanto:

La longitud del cable es  $a + b = 5,77 + 7,78 = 13,55$  metros.

El valor de  $c$  es  $x + y = 2,89 + 5,96 = 8,85$  metros.

## 2. EJERCICIOS DE SUMA, DIFERENCIA DE ÁNGULOS, ÁNGULO DOBLE Y MITAD

### Cuestión 10:

Sabiendo que  $\cos 78^\circ = 0,2$ , calcula  $\operatorname{sen} 78^\circ$  y  $\operatorname{tg} 78^\circ$ . Averigua las razones trigonométricas de  $39^\circ$  aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

- $\cos 78^\circ = 0,2$

$$\operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 78^\circ = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$$

- $\operatorname{sen} 39^\circ = \operatorname{sen} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$

$$\cos 39^\circ = \cos \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$$

$$\operatorname{tg} 39^\circ = \operatorname{tg} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{1 + \cos 78^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$$

### Cuestión 11:

**Halla las razones trigonométricas de  $45^\circ$  a partir de  $\cos 90^\circ = 0$ .**

- $\cos 90^\circ = 0$

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \sqrt{1} = 1$$

### Cuestión 12:

**Halla las razones trigonométricas del ángulo de  $75^\circ$  sabiendo que  $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ .**

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 75^\circ &= \operatorname{sen} (30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos (30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg} (30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 3)/3}{(\sqrt{3} - 3)/3} = \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{6} = \\ &= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

NOTA: También podemos resolverlo como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^\circ &= \frac{\operatorname{sen} 75^\circ}{\operatorname{cos} 75^\circ} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{6 - 2} = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{4} = \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

**Cuestión 13:**

Sabiendo que  $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$  y que  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , calcula, sin hallar previamente el valor de  $x$ :

- a)  $\operatorname{sen} 2x$                                       b)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$                                       c)  $\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$   
 d)  $\operatorname{cos} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$                                       e)  $\operatorname{cos} \frac{x}{2}$                                       f)  $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

• Tienes que calcular  $\operatorname{cos} x = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$  y  $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ , y aplicar las fórmulas.

$$\cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5} \quad (\text{Negativo, por ser del } 2^\circ \text{ cuadrante}).$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{a) } \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 - (-4/5)}{1 + (-4/5)}} = \sqrt{\frac{9/5}{1/5}} = 3$$

Signo positivo, pues si  $x \in 2^\circ$  cuadrante, entonces  $\frac{x}{2} \in 1^\circ$  cuadrante.

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \cos \frac{x}{2} \stackrel{(*)}{=} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 4/5}{2}} = \sqrt{\frac{1/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

(\*) Signo positivo, porque  $\frac{x}{2} \in 1^\circ$  cuadrante.

$$\text{f) } \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi/4}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \pi/4} = \frac{-3/4 + 1}{1 - (-3/4) \cdot 1} = \frac{1 - 3/4}{1 + 3/4} = \frac{1}{7}$$

#### Cuestión 14:

Halla las razones trigonométricas del ángulo de  $15^\circ$  de dos formas, considerando:

a)  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

b)  $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen} (45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,258819 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0,965926 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} = \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} = 0,267949 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 0,258819 \end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0,9659258$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{0,258819}{0,9659258} = 0,2679491$$

**Cuestión 15:**

Si  $\operatorname{tg} \alpha = -4/3$  y  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , calcula:

a)  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$

b)  $\cos \left( 180^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$

c)  $\operatorname{tg} (900^\circ + \alpha)$

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$$

Además,  $\frac{\alpha}{2} \in 1^{\text{er}}$  cuadrante

•  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$

•  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$

•  $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$$a) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \alpha = 1 \cdot \left( -\frac{3}{5} \right) - 0 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} b) \cos \left( 180^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) &= \cos 180^\circ \cos \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = -\cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + (-3/5)}{2}} = -\sqrt{\frac{5-3}{10}} = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{10}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \operatorname{tg} (900^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} (2 \cdot 360^\circ + 180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 180^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{0 + (-4/3)}{1 - 0 \cdot (-4/3)} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

**Cuestión 16:**

Sabemos que  $\cos x = -\frac{3}{4}$  y  $\operatorname{sen} x < 0$ . Sin hallar el valor de  $x$ , calcula:

a)  $\operatorname{sen} x$

b)  $\cos (\pi + x)$

c)  $\cos 2x$

d)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

e)  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$

f)  $\cos \left( \pi - \frac{x}{2} \right)$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = -3/4 \\ \operatorname{sen} x < 0 \end{array} \right\} \rightarrow x \in 3^{\text{er}} \text{ cuadrante} \Rightarrow \frac{x}{2} \in 2^\circ \text{ cuadrante}$$

$$a) \operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$b) \cos (\pi + x) = \cos \pi \cos x - \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} x = -\cos x = \frac{3}{4}$$

$$c) \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$d) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = -\sqrt{\frac{1 + 3/4}{1 - 3/4}} = \sqrt{\frac{7}{1}} = \sqrt{7}$$

$$e) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x = \cos x = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} f) \cos \left( \pi - \frac{x}{2} \right) &= \cos \pi \cos \frac{x}{2} + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{2} = \\ &= -\left( -\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \right) = \sqrt{\frac{1 - 3/4}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} \end{aligned}$$

**Cuestión 17:**

Si  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4$  y  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ , halla  $\operatorname{tg} 2\beta$ .

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \rightarrow 4 = \frac{-2 + \operatorname{tg} \beta}{1 + 2 \operatorname{tg} \beta} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 + 8 \operatorname{tg} \beta = -2 + \operatorname{tg} \beta \rightarrow 7 \operatorname{tg} \beta = -6 \rightarrow \operatorname{tg} \beta = -\frac{6}{7}$$

Luego:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \cdot (-6/7)}{1 - 36/49} = \frac{-12/7}{13/49} = \frac{-12 \cdot 49}{7 \cdot 13} = -\frac{84}{13}$$

**Cuestión 18:**

Sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  siendo  $0 < \alpha < 90$  y  $\cos \beta = -\frac{3}{5}$  siendo  $90 < \beta < 180$  calcular:

- $\operatorname{sen} 2\alpha$
- $\operatorname{tg} 2\beta$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$
- $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$
- $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2} - 2\alpha\right)$

**Solución.**

**Solución.**

El primer paso es calcular las razones trigonométricas de  $\alpha$  y  $\beta$  que no conocemos.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \text{ siendo } 0 < \alpha < 90 \Rightarrow \alpha \in 1^\circ \text{ Cuadrante: } \begin{cases} \operatorname{seno} + \\ \operatorname{coseno} + \\ \operatorname{tangente} + \end{cases}$$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la secante y, de esta el coseno

$$\operatorname{tag}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha : \sec \alpha = \pm \sqrt{\operatorname{tag}^2 \alpha + 1} = + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} : \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conocidos los valores del coseno y la tangente se calcula el valor del seno.

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cosa}} : \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tag} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ siendo } 90 < \beta < 180 \Rightarrow \alpha \in 2^\circ \text{ Cuadrante: } \begin{cases} \text{seno} + \\ \text{coseno} - \\ \text{tangente} + \end{cases}$$

Partiendo del coseno se calcula el seno y, con el seno y el coseno la tangente.

$$\text{sen}^2 \beta + \text{cos}^2 \beta = 1: \text{sen } \beta = \pm \sqrt{1 - \text{cos}^2 \beta} = + \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\text{cos } \beta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

Conocidas las razones trigonométricas de  $\alpha$  y  $\beta$ , se resuelven los apartados del ejercicio.

$$\text{a) } \text{Sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6\sqrt{5}}{25}$$

$$\text{b) } \text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \text{sen } (\alpha + \beta) &= \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \\ &= \frac{-3\sqrt{5}}{25} + \frac{8\sqrt{5}}{25} = \frac{5\sqrt{5}}{25} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \text{tg } (\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{6}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{11}{2}$$

$$e) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{10}}$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad \operatorname{sen} \left( \frac{\beta}{2} - 2\alpha \right) &= \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cdot \cos 2\alpha - \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha = \\
 &= \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \cdot (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \\
 &= \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \cdot \left( \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \right) - \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{\frac{8}{10}} \cdot \frac{15}{25} - \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{4}{5} = \\
 &= \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \frac{3}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}
 \end{aligned}$$

**Cuestión 19:***Demostrar la fórmula:*

$$\cos x = \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$

Sol:

Usamos la fórmula del seno de la suma

$$\operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} x \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

**3. EJERCICIOS DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS****Cuestión 20:**Demuestra que  $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ .

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

**Cuestión 21:**

Demuestra que  $2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ .

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha) + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \left( \frac{1 - \cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

**Cuestión 22:**

Demuestra que  $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

**Cuestión 23:**

Demuestra que  $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$ .

Aplica las fórmulas de  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$  y  $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ . Divide tanto el numerador como el denominador entre  $\cos \alpha \cos \beta$  y simplifica.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} \quad (*) \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

(\*) Dividimos numerador y denominador entre  $\cos \alpha \cos \beta$ .

**Cuestión 24:**

Prueba que  $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ .

Sustituye  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$ .

$$\text{Como } \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Y sustituyendo en la expresión:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x &= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x (1 + \cos x) - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} \quad (*) \\ &= \frac{\operatorname{sen} x [1 + \cos x - \cos x]}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

(\*) Sacando factor común.

### Cuestión 25:

**Demuestra que**  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos x$ .

• *Desarrolla y sustituye las razones de  $\frac{\pi}{3}$  y  $\frac{2\pi}{3}$ .*

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \\ &= \left[\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right] - \left[\cos x \cos \frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right] = \\ &= \left[(\cos x) \frac{1}{2} - (\operatorname{sen} x) \frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \left[(\cos x) \left(-\frac{1}{2}\right) - (\operatorname{sen} x) \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \cos x \end{aligned}$$

### Cuestión 26:

**Simplifica:**  $\frac{2 \cos(45^\circ + \alpha) \cos(45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$

• *Al desarrollar el numerador obtendrás una diferencia de cuadrados.*

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos(45^\circ + \alpha) \cos(45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} &= \\ &= \frac{2 (\cos 45^\circ \cos \alpha - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha) (\cos 45^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 (\cos^2 45^\circ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 45^\circ \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\right]}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 1/2 \cos^2 \alpha - 2 \cdot 1/2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

### Cuestión 27:

Simplifica la expresión  $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha}$  y calcula su valor para  $\alpha = 90^\circ$ .

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Por tanto, si  $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$

**Cuestión 28:**

Demuestra que para cualquier ángulo  $\alpha$  se verifica:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{cos} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

Desarrollamos la segunda parte de la igualdad:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) &= \sqrt{2} \left( \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \alpha \right) = \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha) = \frac{2}{2} (\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha) = \\ &= \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

**Cuestión 29:**

Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} (b - c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} (a - c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} (a - b)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} (b - c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} (a - c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} (a - b) &= \\ = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cos} c - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{cos} a + \\ + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cos} a &= 0 \end{aligned}$$

**Cuestión 30:**

Demuestra que  $\operatorname{cos} (a + b) \cdot \operatorname{cos} (a - b) = \operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{cos}^2 b - \operatorname{sen}^2 a$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} (a + b) \cdot \operatorname{cos} (a - b) &= (\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot (\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) = \\ = \operatorname{cos}^2 a \cdot \operatorname{cos}^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b \end{aligned}$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\operatorname{cos}^2 a \cdot \operatorname{cos}^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{cos}^2 a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 b) - (1 - \operatorname{cos}^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$
- $\operatorname{cos}^2 a \cdot \operatorname{cos}^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{cos}^2 b \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 a) - (1 - \operatorname{cos}^2 b) \cdot \operatorname{sen}^2 a = \operatorname{cos}^2 b - \operatorname{sen}^2 a$

#### 4. EJERCICIOS DE TRIÁNGULOS (TEOREMAS DEL SENO Y COSENO)

**Cuestión 31:**

Resuelve los siguientes triángulos:

a)  $a = 12$  cm;  $b = 16$  cm;  $c = 10$  cm

b)  $b = 22$  cm;  $a = 7$  cm;  $\widehat{C} = 40^\circ$

c)  $a = 8$  m;  $b = 6$  m;  $c = 5$  m

d)  $b = 4$  cm;  $c = 3$  cm;  $\widehat{A} = 105^\circ$

e)  $a = 4$  m;  $\widehat{B} = 45^\circ$  y  $\widehat{C} = 60^\circ$

f)  $b = 5$  m;  $\widehat{A} = \widehat{C} = 35^\circ$

a) •  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

$$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \widehat{A}$$

$$144 = 256 + 100 - 320 \cos \widehat{A}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{256 + 100 - 144}{320} = 0,6625$$

$$\widehat{A} = 48^\circ 30' 33''$$

•  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$

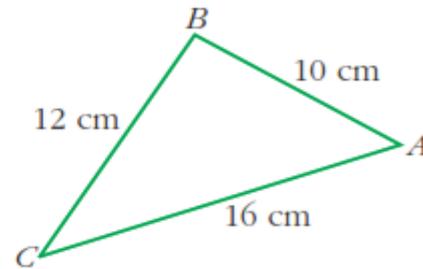
$$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \widehat{B}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{144 + 100 - 256}{240} = -0,05$$

$$\widehat{B} = 92^\circ 51' 57,5''$$

•  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \rightarrow \widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B}$

$$\widehat{C} = 38^\circ 37' 29,5''$$



b) •  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$

$$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40^\circ =$$

$$= 49 + 484 - 235,94 = 297,06$$

$$c = 17,24 \text{ cm}$$

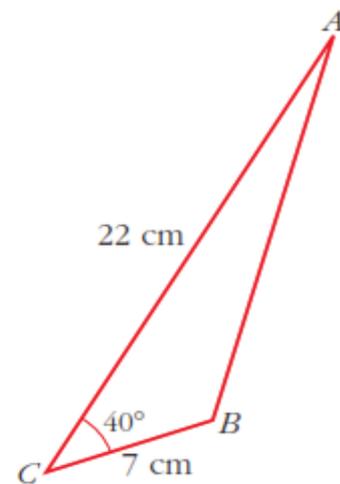
•  $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \rightarrow \frac{7}{\sin \widehat{A}} = \frac{17,24}{\sin 40^\circ}$

$$\sin \widehat{A} = \frac{7 \sin 40^\circ}{17,24} = 0,26$$

$$A = \begin{cases} \widehat{A}_1 = 15^\circ 7' 44,3'' \\ \widehat{A}_2 = 164^\circ 52' 15,7'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida}$$

(La solución  $A_2$  no es válida, pues  $\widehat{A}_2 + \widehat{C} > 180^\circ$ ).

•  $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 124^\circ 52' 15,7''$



$$c) \bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{36 + 25 - 64}{60} = -0,05$$

$$\hat{A} = 92^\circ 51' 57,5''$$

$$\bullet b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

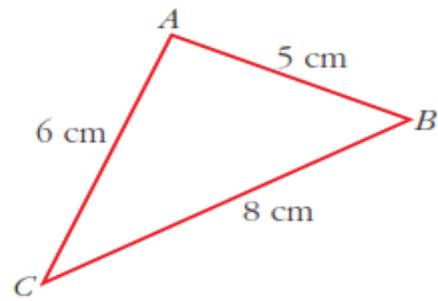
$$36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{64 + 25 - 36}{80} = 0,6625$$

$$\hat{B} = 48^\circ 30' 33''$$

$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 38^\circ 37' 29,5''$$

(NOTA: Compárese con el apartado a). Son triángulos semejantes).



$$d) \bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} =$$

$$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105^\circ = 31,21$$

$$a = 5,59 \text{ m}$$

$$\bullet \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

$$\frac{5,59}{\text{sen } 105^\circ} = \frac{4}{\text{sen } \hat{B}}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{4 \cdot \text{sen } 105^\circ}{5,59} = 0,6912$$

$$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43^\circ 43' 25,3'' \\ \hat{B}_2 = 136^\circ 16' 34,7'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida}$$

(La solución  $\hat{B}_2$  no es válida, pues  $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 > 180^\circ$ ).

$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 31^\circ 16' 34,7''$$

$$e) \bullet \hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 75^\circ$$

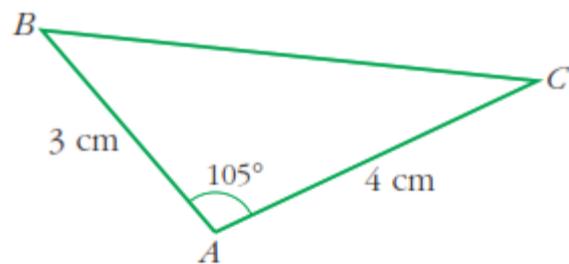
$$\bullet \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

$$\frac{4}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 45^\circ}$$

$$b = \frac{4 \cdot \text{sen } 45^\circ}{\text{sen } 75^\circ} = 2,93 \text{ m}$$

$$\bullet \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \rightarrow \frac{4}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$c = \frac{4 \cdot \text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 75^\circ} = 3,59 \text{ m}$$



$$f) \bullet \widehat{B} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 110^\circ$$

$$\bullet \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{5}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{a}{\operatorname{sen} 35^\circ}$$

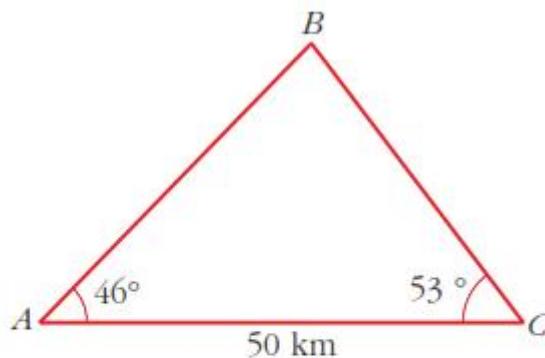
$$a = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 110^\circ} = 3,05 \text{ m}$$

$$\bullet \text{ Como } \widehat{A} = \widehat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3,05 \text{ m}$$

**Cuestión 32:**

Un barco  $B$  pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio,  $A$  y  $C$ , que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos:  $BAC = 46^\circ$  y  $BCA = 53^\circ$ . ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

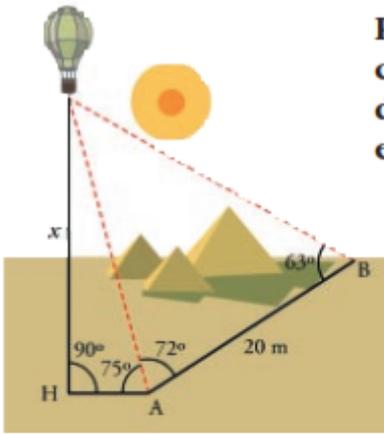
$$\widehat{B} = 180^\circ - 46^\circ - 53^\circ = 81^\circ$$



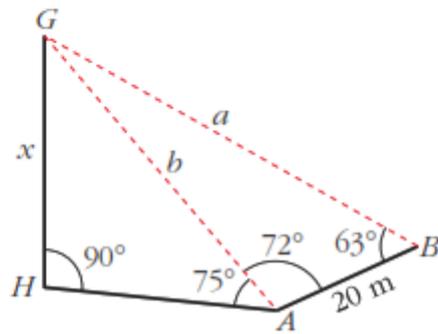
$$\bullet \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow a = \frac{b \operatorname{sen} \widehat{A}}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 46^\circ}{\operatorname{sen} 81^\circ} = 36,4 \text{ km}$$

$$\bullet \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow c = \frac{b \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 53^\circ}{\operatorname{sen} 81^\circ} = 40,4 \text{ km}$$

**Cuestión 33:**



Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?



$$\widehat{AGB} = 180^\circ - 72^\circ - 63^\circ = 45^\circ$$

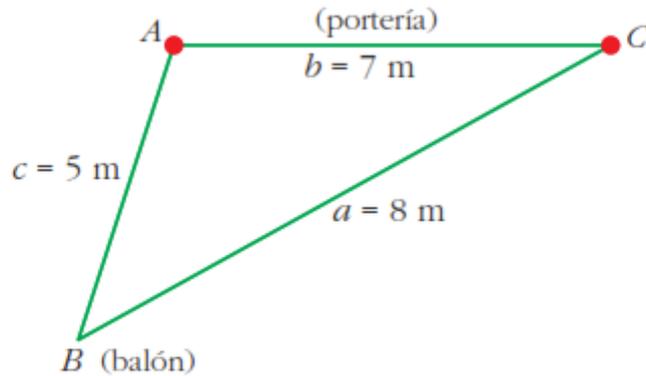
$$\bullet \frac{b}{\operatorname{sen} 63^\circ} = \frac{20}{\operatorname{sen} 45^\circ} \rightarrow b = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 63^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} = 25,2 \text{ m}$$

$$\bullet \frac{a}{\operatorname{sen} 72^\circ} = \frac{20}{\operatorname{sen} 45^\circ} \rightarrow a = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 72^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} = 26,9 \text{ m}$$

$$\bullet \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{x}{b} = \frac{x}{25,2} \rightarrow x = 25,2 \cdot \operatorname{sen} 75^\circ = 24,3 \text{ m}$$

### Cuestión 34:

En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



Aplicando el teorema del coseno:

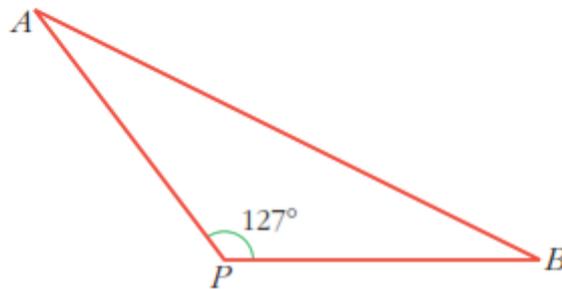
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0,5 \rightarrow B = 60$$

### Cuestión 35:

Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de  $127^\circ$ . El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

(Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m)



La distancia que recorre cada uno en ese tiempo es:

$$\text{Barco A} \rightarrow \overline{PA} = 17 \cdot 1\,850 \text{ m/h} \cdot 5 \text{ h} = 157\,250 \text{ m}$$

$$\text{Barco B} \rightarrow \overline{PB} = 26 \cdot 1\,850 \text{ m/h} \cdot 3,5 \text{ h} = 168\,350 \text{ m}$$

Necesariamente,  $\overline{AB} > \overline{PA}$  y  $\overline{AB} > \overline{PB}$ , luego:

$$\overline{AB} > 168\,350 \text{ m}$$

Como el alcance de sus equipos de radio es 150 000 m, no podrán ponerse en contacto.

(NOTA: Puede calcularse  $\overline{AB}$  con el teorema del coseno  $\rightarrow \overline{AB} = 291\,432,7 \text{ m}$ ).

**Cuestión 36:**

Prueba que solo existe un triángulo con estos datos:  $b = \sqrt{3}$  m,  $a = 1,5$  m,  $\hat{A} = 60^\circ$

¿Existe algún triángulo con estos datos?

$$\hat{C} = 135^\circ, b = 3\sqrt{2} \text{ cm}, c = 3 \text{ cm}$$

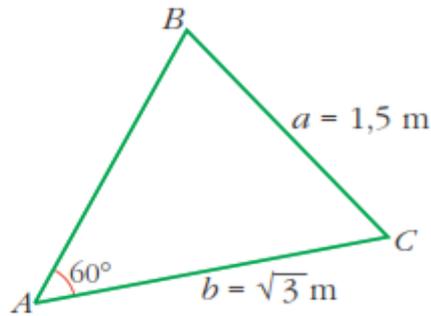
$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$1,5^2 = (\sqrt{3})^2 + c^2 - 2\sqrt{3} c \cos 60^\circ$$

$$2,25 = 3 + c^2 - 2\sqrt{3} c \cdot \frac{1}{2}$$

$$c^2 - \sqrt{3} c + 0,75 = 0$$

$$c = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$



La ecuación de segundo grado solo tiene una raíz. Solo hay una solución.

(NOTA: También se pueden estudiar las dos soluciones que salen para  $B$  con el teorema del seno y ver que una de ellas no es válida, pues quedaría  $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$ ).

- Podemos resolverlo con el teorema del coseno, como antes, o con el teorema del seno. Resolvemos este apartado con el segundo método mencionado:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sin \hat{B}} = \frac{3}{\sin 135^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin \hat{B} = \frac{3\sqrt{2} \sin 135^\circ}{3} = \sqrt{2} \sin 135^\circ = 1 \rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

Pero:  $\hat{C} + \hat{B} = 135^\circ + 90^\circ > 180^\circ$  ¡Imposible!

Luego la solución no es válida y, por tanto, concluimos que no hay ningún triángulo con esos datos.

**Cuestión 37:**

Resolver los siguientes triángulos:

- $b = 57$   $c = 100$   $\hat{A} = 57^\circ$  Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre los dos.

Aplicando el teorema del coseno se calcula el lado que falta.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}} = \sqrt{57^2 + 100^2 - 2 \cdot 57 \cdot 100 \cos 57} = 83'9$$

Conocidos los tres lados, se calcula uno cualquiera de los ángulos que faltan por el teorema del coseno.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(83'9)^2 + 100^2 - 57^2}{2 \cdot 83'9 \cdot 100} = 0'82$$

$$\cos \hat{B} = 0'82 \Rightarrow \hat{B} = \arccos 0'82 = 34'7^\circ$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se saca como diferencia hasta  $180^\circ$ .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \quad \hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (100^\circ + 34'7'') = 45'3''$$

- ii.  $b = 57$   $c = 100$   $\hat{B} = 57^\circ$  Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es saber si el triángulo tiene solución. Para ello aplicamos el teorema de seno a los datos, y despejamos el seno del ángulo que nos falta.

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad \sin \hat{C} = \frac{c}{b} \sin \hat{B} = \frac{100}{57} \sin 57^\circ = 1'47 > 1 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

- iii.  $a = 7$   $b = 17$   $\hat{B} = 76^\circ$  Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es saber si el triángulo tiene solución. Para ello aplicamos el teorema de seno a los datos, y despejamos el seno del ángulo que nos falta.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \quad \sin \hat{A} = \frac{a}{b} \sin \hat{B} = \frac{7}{17} \sin 76^\circ = 0'40 < 1 \Rightarrow \text{Tiene solución}$$

Como además  $\frac{7}{17} < 1$ , la solución es única, y el ángulo  $\hat{A}$  es agudo.

$$\sin \hat{A} = 0'40 \quad \hat{A} = \arcsen 0'40 = 23'5''$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta  $180^\circ$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \quad \hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (23'5'' + 76^\circ) = 80'5''$$

El lado que falta se calcula por el teorema del seno.

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad c = b \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = 17 \cdot \frac{\sin 80'5''}{\sin 76^\circ} = 17'3''$$

- iv.  $a = 12$ ,  $b = 15$ ,  $c = 18$ . Conocidos los tres lados, los dos primeros ángulos se calculan por el teorema del coseno, y el tercero por la suma de ángulos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \quad \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{15^2 + 18^2 - 12^2}{2 \cdot 15 \cdot 18} = -0'45 \quad \hat{A} = 116'7''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{12^2 + 18^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 18} = 0'56 \quad \hat{B} = 55'8''$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta  $180^\circ$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \quad \hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (116'7'' + 55'8'') = 7'5''$$

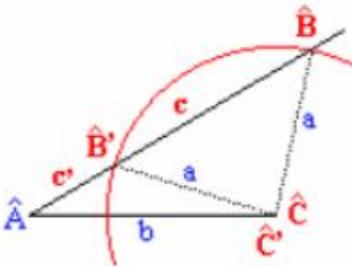
v.  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $a = 15$ ,  $b = 20$ . Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos.

Lo primero es comprobar si el triángulo tiene solución, para lo cual se aplica el teorema del seno a los datos que nos dan, despejando el seno del ángulo que se desconoce, en este caso  $\hat{B}$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \quad \sin \hat{B} = \frac{b}{a} \sin \hat{A} = \frac{20}{15} \sin 30^\circ = 0'67 < 1 \quad \text{El triángulo tiene solución}$$

Teniendo en cuenta que  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} \sin \hat{A} < 1 \\ b > a \end{array} \right\}$  la solución es doble, es decir el ángulo  $\hat{A}$  puede tomar

dos valores, uno agudo ( $\hat{B}$ ) y otro obtuso ( $\hat{B}'$ ) que son suplementarios.



$$\sin \hat{B} = 0'67 \Rightarrow \hat{B} = \arcsen 0'67 = 41'8^\circ$$

$$\hat{B}' = 180 - \hat{B} = 180 - 41'8 = 138'2^\circ$$

Con  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  se calcula  $\hat{C}$ , con  $\hat{A}$  y  $\hat{B}'$  se calcula  $\hat{C}'$ .

$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (30 + 41'8) = 108'2^\circ$$

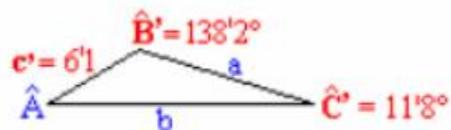
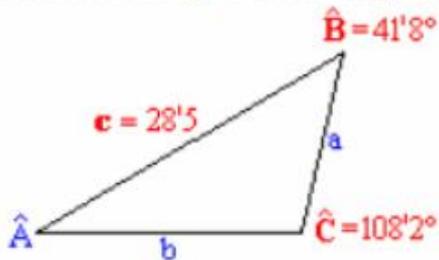
$$\hat{C}' = 180 - (\hat{A} + \hat{B}') = 180 - (30 + 138'2) = 11'8^\circ$$

Con  $\hat{C}$  se calcula  $c$  y con  $\hat{C}'$   $c'$  mediante el teorema del seno, aplicando entre  $a$  y  $c$ .

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad \Rightarrow \quad c = a \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = 15 \frac{\sin 108'2^\circ}{\sin 30^\circ} = 28'5$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c'}{\sin \hat{C}'} \quad \Rightarrow \quad c' = a \frac{\sin \hat{C}'}{\sin \hat{A}} = 15 \frac{\sin 11'8^\circ}{\sin 30^\circ} = 6'1$$

Obteniéndose los siguientes triángulos:



vi.  $\hat{B} = 95^\circ$ ,  $b = 12$ ,  $c = 10$ . Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos.

Como el ángulo conocido es mayor de  $90^\circ$  (obtuso), el triángulo tendrá solución y será única, con la condición de que el lado opuesto al ángulo conocido ( $b$ ) sea mayor que el lado contiguo ( $c$ ).

$$b (12) > c (10)$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad \sin \hat{C} = \frac{c}{b} \sin \hat{B} = \frac{10}{12} \sin 95 = 0'83$$

$$\hat{C} = \arcsen 0'83 = 56'1^\circ$$

Conocido  $\hat{C}$  se calcula  $\hat{A}$  mediante la suma de ángulos.

$$\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180 - (95 + 56'1) = 28'9^\circ$$

El lado que falta ( $a$ ) se calcula mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \quad a = b \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = 12 \frac{\sin 28'9^\circ}{\sin 95^\circ} = 5'8$$

vii.  $b = 80$ ,  $\hat{A} = 15^\circ$ ,  $\hat{B} = 30^\circ$ . Conocidos dos ángulos y un lado.

Mediante la suma de ángulos se calcula el ángulo que falta ( $\hat{C}$ ).

$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (15 + 30) = 135^\circ$$

Conocidos los tres ángulos y un lado, con el teorema del seno se calculan los lados que faltan.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \quad a = b \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = 80 \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 41'4$$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad c = b \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = 80 \frac{\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = 113'1$$

viii.  $a = 40$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ ,  $\hat{C} = 75^\circ$ . Conocidos dos ángulos y un lado.

El ángulo  $\hat{A}$  se calcula como diferencia hasta  $180^\circ$ .

$$\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180 - (45 + 75) = 60^\circ$$

Conocidos los tres ángulo y un lado ( $a$ ), los restantes lados se calculan con el teorema del seno, utilizando en ambos casos  $a$  y  $\hat{A}$ .

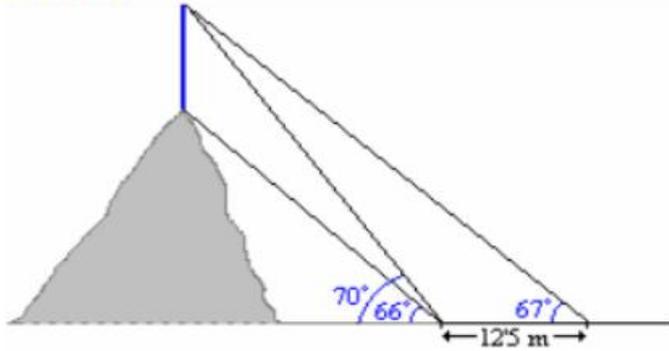
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \quad b = a \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} = 40 \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 32'7$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad c = a \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = 40 \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 44'6$$

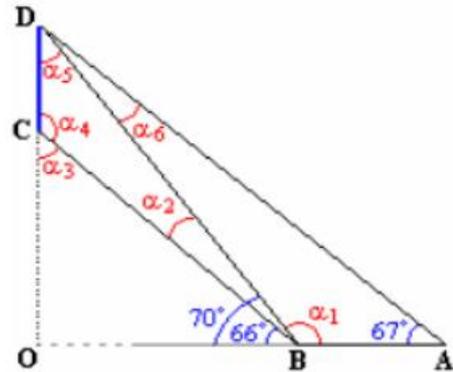
**Cuestión 38:**

Calcular la altura de un repetidor de TV ubicado en la cima de una montaña sabiendo que desde un punto alejado del pie de la montaña la base y el vértice del repetidor se ven bajo unos ángulos de  $66^\circ$  y  $70^\circ$  respectivamente. Si nos alejamos de esa posición en línea recta 12,5 m el vértice ahora lo vemos bajo un ángulo de  $67^\circ$ .

**Solución.**



Con la información del enunciado se pueden obtener una serie de triángulos, rectángulos y oblicuángulos, en los que calcular todos los ángulos únicamente con la condición de que la suma de ángulos es igual a  $180^\circ$ .



-  $\alpha_1$ . Es suplementario al ángulo de  $70^\circ$ .

$$\alpha_1 = 180 - 70 = 110^\circ$$

-  $\alpha_2$ . Como diferencia de ángulos

$$\alpha_2 = 70 - 66 = 4^\circ$$

-  $\alpha_3$ : Complementario al ángulo de  $66^\circ$ .

$$\alpha_3 = 90 - 66 = 24^\circ$$

-  $\alpha_4$ . Suplementario a  $\alpha_3$ .

$$\alpha_4 = 180 - 24 = 156^\circ$$

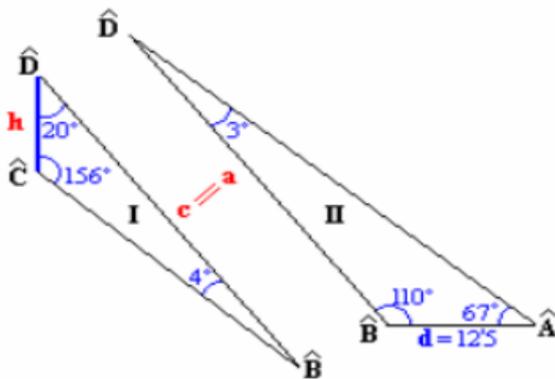
-  $\alpha_5$ . En el triángulo BCD:  $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^\circ$

$$\alpha_5 = 180 - (4 + 156) = 20^\circ$$

-  $\alpha_6$ . En el triángulo ABD:  $67 + \alpha_1 + \alpha_6 = 180^\circ$

$$\alpha_6 = 180 - (67 + 110) = 3^\circ$$

Una vez conocidos todos los ángulos, el problema se resuelve mediante dos triángulos oblicuángulos que comparten un lado como muestra la figura.



En el triángulo I se calcula  $a$  mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen A}}} = \frac{d}{\widehat{\text{sen D}}} \quad a = d \cdot \frac{\widehat{\text{sen A}}}{\widehat{\text{sen D}}}$$

$$a = 12,5 \cdot \frac{\widehat{\text{sen } 67^\circ}}{\widehat{\text{sen } 3^\circ}} \approx 220$$

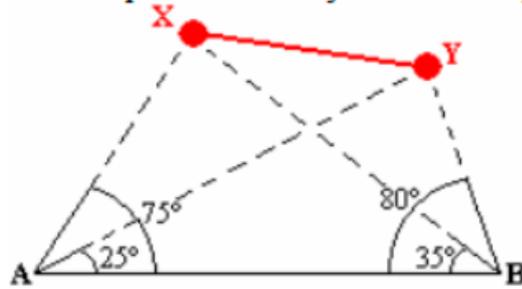
Teniendo en cuenta que  $a = c$ , en el triángulo II se calcula  $h$  con el teorema del seno.

$$\frac{h}{\widehat{\text{sen B}}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen C}}} \quad h = c \cdot \frac{\widehat{\text{sen B}}}{\widehat{\text{sen C}}}$$

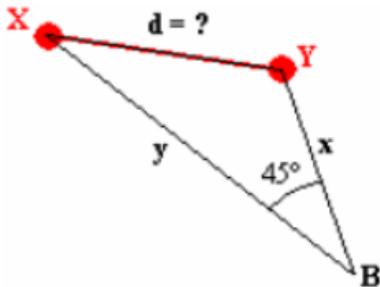
$$h = 220 \cdot \frac{\widehat{\text{sen } 4^\circ}}{\widehat{\text{sen } 156^\circ}} \approx 37,7 \text{ m}$$

**Cuestión 39:**

Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles (X e Y) si desde dos puntos, A y B que distan 210 m, se observan los puntos X e Y bajo las visuales que muestra la figura.

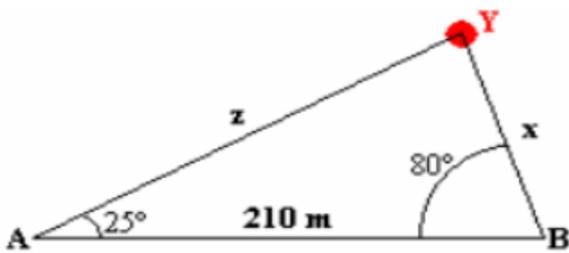
**Solución.**

Lo primero es seleccionar un triángulo donde este la longitud pedida, uno de ellos puede ser el BXY.



Para calcular  $d$ , necesitamos conocer  $x$  e  $y$ , que localizamos en otros triángulos donde tengamos más datos.

- $x$  se puede calcular en el triángulo ABY aplicando el teorema del seno.

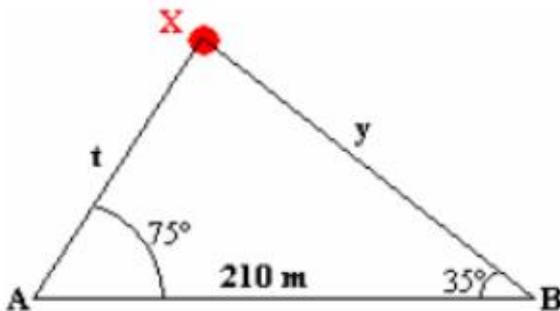


$$25^\circ + 80^\circ + \hat{Y} = 180^\circ \quad \hat{Y} = 75^\circ$$

$$\frac{x}{\sin 25^\circ} = \frac{210}{\sin 75^\circ} \quad x = 210 \frac{\sin 25^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$x \approx 92 \text{ m}$$

- $y$  se puede calcular en el triángulo ABX

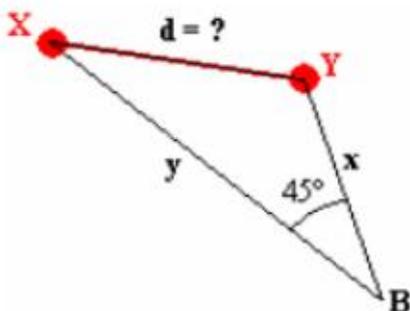


$$75^\circ + 35^\circ + \hat{X} = 180^\circ \quad \hat{X} = 70^\circ$$

$$\frac{y}{\sin 75^\circ} = \frac{210}{\sin 70^\circ} \quad x = 210 \frac{\sin 75^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$x \approx 216 \text{ m}$$

Conocidos  $\hat{B}$ ,  $x$  e  $y$  se calcula el valor de  $d$  mediante el teorema del coseno.



$$d^2 = x^2 + y^2 - 2x \cdot y \cdot \cos \hat{B}$$

$$d = \sqrt{92^2 + 216^2 - 2 \cdot 92 \cdot 216 \cdot \cos 45^\circ} \approx 164 \text{ m}$$

5. EJERCICIOS DE ECUACIONES Y SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOSCuestión 40:

Resolver las ecuaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sol:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 120^\circ \end{cases}$$

$$x + 45^\circ = 60^\circ \quad x_1 = 15^\circ + 360^\circ k$$

$$x + 45^\circ = 120^\circ \quad x_2 = 75^\circ + 360^\circ k$$

Cuestión 41:

$$3\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$$

Sol:

$$\operatorname{sen} x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$\operatorname{sen} x = 1 \quad x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{3} \quad x = \begin{cases} 41^\circ 48' 37'' + 360^\circ k \\ 138^\circ 11' 23'' + 360^\circ k \end{cases}$$

Cuestión 42:

$$\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

Sol:

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x = 0$$

$$2\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{sen} x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \operatorname{arcsen} 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \operatorname{arcsen}(-2) \quad \text{Sin solución}$$

**Cuestión 43:**

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$$

Sol:

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3} \quad \begin{cases} x = 60^\circ + 180^\circ k \\ x = 120^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

**Cuestión 44:**

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

Sol:

Por reducción:

$$e_1 + e_2 \quad 2\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \quad \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 120^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

**Cuestión 45:**

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y = 1 \\ \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sol:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 1 \\ \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 90^\circ & 2x = 120^\circ + 360^\circ k \\ & x = 60^\circ + 180^\circ k \\ x-y = 30^\circ & y = 30^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 90^\circ & 2x = 240^\circ + 360^\circ k \\ & x = 120^\circ + 180^\circ k \\ x-y = 150^\circ & y = -30^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

**Cuestión 46:**

$$2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{cotg} x - 1 = 0$$

Sol:

$$2\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} - 1 = 0 \qquad 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \qquad x = 56^\circ 18' 35'' + 180^\circ k$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \qquad x = 135^\circ + 180^\circ k$$

**Cuestión 47:**

$$\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0$$

Sol:

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0 \qquad 1 - 4\operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \qquad \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$x = \operatorname{arcsen} \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 210^\circ + 360^\circ k \\ x_4 = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

**Cuestión 48:**

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Sol:

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \qquad \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -\frac{1}{2} \qquad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ + 180^\circ k \\ 120^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

**Cuestión 49:**

$$\operatorname{sen} 2x = \cos 60^\circ$$

Sol:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos 60^\circ \qquad \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = 30^\circ + 360^\circ k & x = 15^\circ + 180^\circ k \\ 2x = 150^\circ + 360^\circ k & x = 75^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

**Cuestión 50:**

$$2 \cos x = 3 \operatorname{tg} x$$

Sol:

$$2 \cos x = \frac{3 \operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad 2 \cos^2 x = 3 \operatorname{sen} x$$

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \operatorname{sen} x \qquad 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 3 \operatorname{sen} x$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x = -2 \text{ Sin solución porque } -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

**Cuestión 51:****Resuelve estas ecuaciones:**

a)  $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

b)  $2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

c)  $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

d)  $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 3$

$$a) \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 60^\circ, x_2 = 300^\circ \\ -1 \rightarrow x_3 = 180^\circ \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

$$b) 2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45^\circ, x_2 = 135^\circ$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = -45^\circ = 315^\circ, x_4 = 225^\circ$$

Todas las soluciones son válidas.

$$c) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow x_3 = 45^\circ, x_4 = 225^\circ$$

Todas las soluciones son válidas.

$$d) 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 3 \stackrel{(*)}{\rightarrow} 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 3$$

$$(*) \text{ Como } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 3 \rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

$$\text{Entonces: } \bullet \text{ Si } \cos x = 1 \rightarrow x_1 = 0^\circ$$

$$\bullet \text{ Si } \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x_2 = 60^\circ, x_3 = -60^\circ = 300^\circ$$

Las tres soluciones son válidas.

### Cuestión 52:

#### **Resuelve:**

$$a) 4 \cos 2x + 3 \cos x = 1$$

$$b) \operatorname{tg} 2x + 2 \cos x = 0$$

$$c) \sqrt{2} \cos(x/2) - \cos x = 1$$

$$d) 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^3 x = 0$$

$$a) 4 \cos 2x + 3 \cos x = 1 \rightarrow 4(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 3 \cos x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 3 \cos x = 1 \rightarrow 4(2 \cos^2 x - 1) + 3 \cos x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8 \cos^2 x - 4 + 3 \cos x = 1 \Rightarrow 8 \cos^2 x + 3 \cos x - 5 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0,625 \\ -1 \end{cases}$$

- Si  $\cos x = 0,625 \rightarrow x_1 = 51^\circ 19' 4,13''$ ,  $x_2 = -51^\circ 19' 4,13''$
- Si  $\cos x = -1 \rightarrow x_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{tg} 2x + 2 \cos x = 0 &\rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 2 \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \cos x = 0 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x / \cos x}{1 - (\operatorname{sen}^2 x / \cos^2 x)} + \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} + \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \cos x + \cos x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x (\operatorname{sen} x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow \cos x (\operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x (1 + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si  $\cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ$ ,  $x_2 = 270^\circ$
- Si  $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow x_3 = 210^\circ$ ,  $x_4 = 330^\circ = -30^\circ$
- Si  $\operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x_5 = 90^\circ = x_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} - \cos x = 1 &\rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} - \cos x = 1 \rightarrow \\ &\rightarrow \sqrt{1 + \cos x} - \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - \cos x} = 1 + \cos x \rightarrow \\ &\rightarrow 1 + \cos x = 1 + \cos^2 x + 2 \cos x \rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x (\cos x + 1) = 0 \\ &\bullet \text{ Si } \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ &\bullet \text{ Si } \cos x = -1 \rightarrow x_3 = 180^\circ \end{aligned}$$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son:

$$x_1 = 90^\circ \text{ y } x_3 = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^3 x = 0 &\rightarrow 2 \operatorname{sen} x (\cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \operatorname{sen} x (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x (1 - 4 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \\ &\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ &\bullet \text{ Si } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 150^\circ, x_5 = 210^\circ, x_6 = 330^\circ \end{aligned}$$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

### Cuestión 53:

Escribe, en radianes, la expresión general de todos los ángulos que verifican:

a)  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

b)  $\operatorname{sen} x = \cos x$

c)  $\operatorname{sen}^2 x = 1$

d)  $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

a)  $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$  o bien  $x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ rad} = x \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) Si } \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \\ \text{Si } \operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{O bien } \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k\pi \text{ rad} \\ \text{O bien } \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow x = k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

#### Cuestión 54:

Resuelve los siguientes sistemas:

a)  $\left. \begin{array}{l} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array} \right\}$

c)  $\left. \begin{array}{l} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos(x+y) = 1 \end{array} \right\}$

b)  $\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$

d)  $\left. \begin{array}{l} x+y = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array} \right\}$

Las soluciones de los sistemas quedan:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sumando ambas ecuaciones: } \Rightarrow 2x + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\operatorname{sen}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} y = \pm 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{2}} \quad \boxed{y = \frac{3\pi}{2}}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sumando ambas ecuaciones obtenemos: } \Rightarrow \operatorname{sen}(x+y) = 1 \Rightarrow x+y = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ - y$$

$$\text{Sustituyendo en la 1ª ecuación: } \operatorname{sen}(90^\circ - y) \cdot \cos y = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 y = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 30^\circ; x = 60^\circ} \quad \boxed{y = 150^\circ; x = 300^\circ} \quad \boxed{y = 210^\circ; x = 240^\circ} \quad \boxed{y = 330^\circ; x = 120^\circ}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos(x+y) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{De la 2ª ecuación obtenemos: } \Rightarrow x+y=0^\circ \Rightarrow x=-y$$

$$\text{Sustituyendo en la 1ª ecuación: } \cos(-y) + \cos y = 1 \Rightarrow 2 \cos y = 1$$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{|l} y = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{array} \quad \begin{array}{|l} y = 300^\circ \\ x = 60^\circ \end{array}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x+y=90^\circ \\ \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 90^\circ - x \\ \text{Sustituyendo en la 2ª ecuación} \end{array}$$

$$\sin x + \sin(90^\circ - x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos(90^\circ - x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(45^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x - 45^\circ = 30^\circ \text{ ó } x - 45^\circ = 330^\circ \Rightarrow \begin{array}{|l} y = 75^\circ \\ x = 15^\circ \end{array} \text{ ó } \begin{array}{|l} y = 15^\circ \\ x = 75^\circ \end{array}$$