EJERCICIOS RESUELTOS

UNIDAD 8: NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1:

Resuelve las siguientes ecuaciones, y expresa sus soluciones como números complejos.

a) $3x^2-3x+2=0$ b) $x^2-x+1=0$

a) $3x^2-3x+2=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot3\cdot2}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}i}{6}\\[2mm] x_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}i}{6}\end{cases}$$

b) $x^2-x+1=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\end{cases}$$

Ejercicio 2:

De los siguientes números complejos:

$$3+2i,\ -\sqrt{3}+5i,\ 2i,\ 7,\ 0$$

a) ¿Cuáles son números reales? Ponlos en forma binómica.

b) ¿Cuáles son imaginarios?

c) ¿Cuáles son imaginarios puros? Ponlos en forma binómica.

d) Escribe el opuesto de cada uno de ellos.

e) Escribe el conjugado de cada uno de ellos.

a) $7=7+0i$ y $0=0+0i$ son números reales.

b) Los números imaginarios son $3+2i$, $-\sqrt{3}+5i$ y $2i$.

c) $2i=0+2i$ es imaginario puro.

d) El opuesto de $z=3+2i$ es $-z=-3-2i$. El opuesto de $z=-\sqrt{3}+5i$ es $-z=\sqrt{3}-5i$.

El opuesto de $z=2i$ es $-z=-2i$. El opuesto de $z=7$ es $-z=-7$.

El opuesto de $z=0$ es $-z=0$.

e) El conjugado de $z=3+2i$ es $\overline{z}=3-2i$. El conjugado de $z=-\sqrt{3}+5i$ es $\overline{z}=-\sqrt{3}-5i$.

El conjugado de $z=2i$ es $\overline{z}=-2i$. El conjugado de $z=7$ es $\overline{z}=7$.

El conjugado de $z=0$ es $\overline{z}=0$.

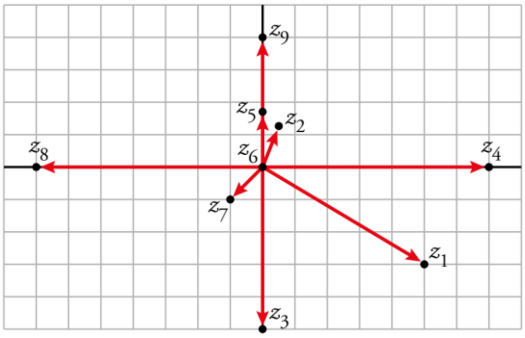
Ejercicio 3:

Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles son imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

$$5 - 3i;\ \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i;\ -5i;\ 7;\ \sqrt{3}i;\ 0;\ -1 - i;\ -7;\ 4i$$

Si llamamos:

$z_1 = 5 - 3i$	$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i$	$z_3 = -5i$
$z_4 = 7$	$z_5 = \sqrt{3}i$	$z_6 = 0$
$z_7 = -1 - i$	$z_8 = -7$	$z_9 = 4i$



Son reales z_4, z_6 y z_8. El resto son imaginarios. Son imaginarios puros z_3, z_5 y z_9.

Ejercicio 4:

Obtén un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$.

$$P(x) = (x - \sqrt{2}i)[x - (-\sqrt{2}i)] = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = x^2 - (-2) = x^2 + 2$$

Ejercicio 5:

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i}$

g) $\frac{1 - 4i}{3 + i}$

h) $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i}$

i) $\frac{5 + i}{-2 - i}$

j) $\frac{1 + 5i}{3 + 4i}$

k) $\frac{4 - 2i}{i}$

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$

m) $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$

a) $(6-5i)+(2-i)-2(-5+6i)=6-5i+2-i+10-12i=18-18i$

b) $(2-3i)-(5+4i)+\frac{1}{2}(6-4i)=2-3i-5-4i+3-2i=-9i$

c) $(3+2i)(4-2i)=12-6i+8i-4i^2=12+2i+4=16+2i$

d) $(2+3i)(5-6i)=10-12i+15i-18i^2=10+3i+18=28+3i$

e) $(-i+1)(3-2i)(1+3i)=(-3i+2i^2+3-2i)(1+3i)=(3-2-5i)(1+3i)=$

$=(1-5i)(1+3i)=1+3i-5i-15i^2=1+15-2i=16-2i$

f) $\frac{2+4i}{4-2i}=\frac{(2+4i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{8+4i+16i+8i^2}{16-4i^2}=\frac{20i}{16+4}=\frac{20i}{20}=i$

g) $\frac{1-4i}{3+i}=\frac{(1-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3-i-12i+4i^2}{9-i^2}=\frac{3-13i-4}{9+1}=\frac{-1-13i}{10}=\frac{-1}{10}-\frac{13}{10}i$

h) $\frac{4+4i}{-3+5i}=\frac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)}=\frac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2}=\frac{-12-32i+20}{9+25}=$

$=\frac{8-32i}{34}=\frac{8}{34}-\frac{32}{34}i=\frac{4}{17}-\frac{16}{17}i$

i) $\frac{5+i}{-2-i}=\frac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)}=\frac{-10+5i-2i+i^2}{4+1}=\frac{-10+3i-1}{5}=\frac{-11+3i}{5}=\frac{-11}{5}+\frac{3}{5}i$

j) $\frac{1+5i}{3+4i}=\frac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2}=\frac{3+11i+20}{9+16}=\frac{23+11i}{25}=\frac{23}{25}+\frac{11}{25}i$

k) $\frac{4-2i}{i}=\frac{(4-2i)(-i)}{i(-i)}=\frac{-4i+2i^2}{1}=-4i-2=-2-4i$

l) $6-3\left(5+\frac{2}{5}i\right)=6-15+\frac{6}{5}i=-9+\frac{6}{5}i$

m) $\frac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)}=\frac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)}=\frac{-9(1-2i)}{(2+2i)}=\frac{-9+18i}{(2+2i)}=\frac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=$

$=\frac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2}=\frac{-18+54i+36}{4+4}=\frac{18+54i}{8}=\frac{18}{8}+\frac{54}{8}i=\frac{9}{4}+\frac{27}{4}i$

<u>Ejercicio 6</u>:

Calcula x para que $(25-xi)^2$ sea imaginario puro. (Ayuda: desarrolla $(25-xi)^2$ e iguala a cero la componente real).

$(25-xi)^2=625+x^2i^2-50xi=(625-x^2)-50xi$

Para que sea imaginario puro:

$625-x^2=0 \rightarrow x^2=625 \rightarrow x=\pm\sqrt{625}=\pm 25$

Hay dos soluciones: $x_1=-25,\ x_2=25$

Ejercicio 7:

¿Verdadero o falso?

a) Los módulos de dos números complejos opuestos son iguales pero con signos distintos.

b) Los módulos de dos complejos opuestos son iguales.

c) Los módulos de dos complejos conjugados son iguales.

d) Los argumentos de dos números complejos opuestos difieren en 180°.

e) Los argumentos de dos números complejos conjugados son opuestos $(\alpha$ y $-\alpha)$.

f) El argumento de cualquier número real es 0°.

g) El argumento de los números reales negativos es 180°.

h) El argumento de un imaginario puro es 90° o 270°.

a) Falso. El módulo de un número complejo no nulo siempre es un número positivo.

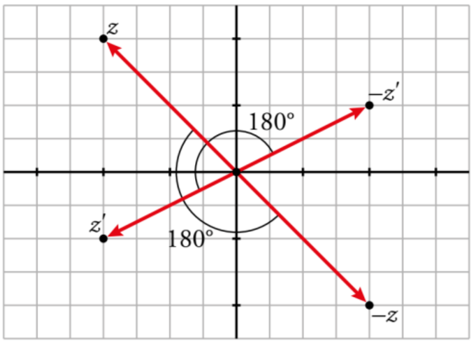
b) Verdadero.

Si $z = a + bi \rightarrow -z = -a - bi \rightarrow |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

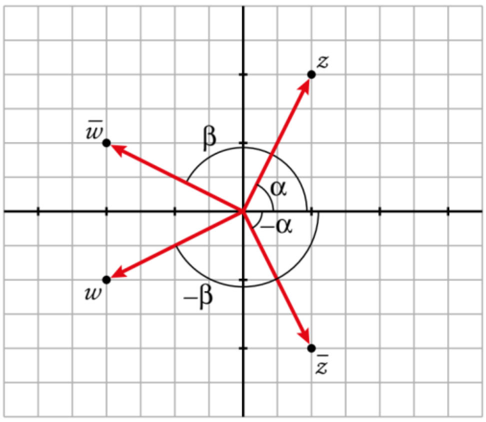
c) Verdadero.

Si $z = a + bi \rightarrow \overline{z} = a - bi \rightarrow |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

d) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:



e) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:



f) Falso. Solo los números reales positivos tienen argumento 0°.

g) Verdadero, porque sus afijos están en el eje horizontal negativo que forma 180° con el eje horizontal positivo.

h) Verdadero, porque su afijo está en el eje vertical que forma 90° con el eje horizontal positivo, en el caso en que la parte imaginaria sea positiva, y 270° en el caso en que la parte imaginaria sea negativa.

Ejercicio 8:

Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

a) $1+\sqrt{3}\,i$ **b)** $\sqrt{3}+i$ **c)** $-1+i$

d) $5-12i$ **e)** $3i$ **f)** -5

a) $1+\sqrt{3}\,i=2_{60^\circ}$ b) $\sqrt{3}+i=2_{30^\circ}$ c) $-1+i=\sqrt{2}_{135^\circ}$

d) $5-12i=13_{292^\circ\,37'}$ e) $3i=3_{90^\circ}$ f) $-5=5_{180^\circ}$

Ejercicio 9:

Escribe en forma binómica estos números complejos:

a) $5_{(\pi/6)\text{ rad}}$ **b)** 2_{135° **c)** 2_{495°

d) 3_{240° **e)** 5_{180° **f)** 4_{90°

a) $5_{(\pi/6)}=5\left(cos\,\frac{\pi}{6}+i\,sen\,\frac{\pi}{6}\right)=5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$

b) $2_{135^\circ}=2\,(cos\,135^\circ+i\,sen\,135^\circ)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

c) $2_{495^\circ}=2_{135^\circ}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

d) $3_{240^\circ}=3\,(cos\,240^\circ+i\,sen\,240^\circ)=3\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180^\circ}=-5$

f) $4_{90^\circ}=4i$

Ejercicio 10:

Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:

$\boldsymbol{z=8(cos\,30^\circ+i\,sen\,30^\circ)}$

$z=8_{30^\circ}=8\,(cos\,30^\circ+i\,sen\,30^\circ)=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{2}i=4\sqrt{3}+4i$

Ejercicio 11:

Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°}$ **b)** $6_{45°} : 3_{15°}$

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°}$ **d)** $5_{(2\pi/3)\ rad} : 1_{60°}$

e) $(1 - \sqrt{3}\, i)^5$ **f)** $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°} = 5_{180°} = -5$

b) $6_{45°} : 3_{15°} = 2_{30°} = 2\,(cos\ 30° + i\ sen\ 30°) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°} = 6_{120°} = 6\,(cos\,120° + i\ sen\,120°) = 6\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}\,i$

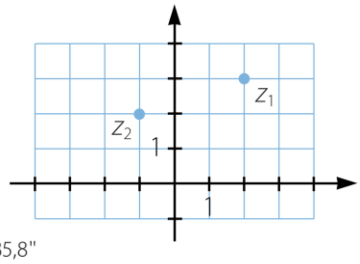
d) $5_{(2\pi/3)\,rad} : 1_{60°} = 5_{120°} : 1_{60°} = 5_{60°} = 5\,(cos\ 60° + i\ sen\ 60°) = 5\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\,i$

e) $(1 - \sqrt{3}\,i)^5 = (2_{300°})^5 = 32_{1\,500°} = 32_{60°} = 32\,(cos\ 60° + i\ sen\ 60°) = 32\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$

f) $4i = 4_{90°}$

Ejercicio 12:

Determina la expresión polar de los números complejos representados.



$$Z_1 \rightarrow r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$tg\ \alpha = \frac{3}{2} \rightarrow = 56°\,18'\,35{,}8'' \qquad Z_1 = (2, 3) = \sqrt{13}_{\,56°\,18'\,35{,}8''}$$

$$Z_2 \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2}{-1} \rightarrow \xrightarrow{\alpha \in (90°,\ 180°)} \alpha = 116°\,33'\,54'' \qquad Z_2 = (-1, 2) = \sqrt{5}_{\,116°\,33'\,54''}$$

Ejercicio 13:

Expresa en forma polar.

a) $2 + i$ c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e) $-4i$

b) $-2 - i$ d) $2 - \sqrt{3}\,i$ f) 12

a) $2 + i = \sqrt{5}_{\,26°\,33'\,54{,}2''}$

b) $-2 - i = \sqrt{5}_{\,206°\,33'\,54''}$

c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = \dfrac{\sqrt{2}}{2}_{\,135°}$

d) $2 - \sqrt{3}i = \sqrt{7}_{\,310°\,53'\,36{,}2''}$

e) $-4i = 4_{270°}$

f) $12 = 12_{0°}$

Ejercicio 14:

Expresa estos números en formas binómica y trigonométrica.

a) $1_{120°}$ c) $2_{\frac{\pi}{3}}$

b) $3_{240°}$ d) $3_{\frac{3\pi}{2}}$

a) $1_{120°} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (cos\ 120° + i\ sen\ 120°)$

b) $3_{240°} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 3\ (cos\ 240° + i\ sen\ 240°)$

c) $2_{\frac{\pi}{3}} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\ sen\frac{\pi}{3}\right)$

d) $3_{\frac{3\pi}{2}} = (0, -3) = 3\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\ sen\frac{3\pi}{2}\right)$

Ejercicio 15:

Dados los números complejos:

$$z_1 = 2_{30°} \qquad z_2 = cos\ 60° + i\ sen\ 60° \qquad z_3 = 2_{\frac{5\pi}{4}}$$

calcula.

a) $z_1 \cdot z_2$ c) $z_3 \cdot z_3$

b) $z_1 \cdot \bar{z}_3$ d) $(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2$

$z_1 = 2_{30°} \qquad z_2 = 1_{60°} \qquad z_3 = 2_{225°}$

a) $2_{30°} \cdot 1_{60°} = 2_{90°}$ c) $2_{225°} \cdot 2_{225°} = 4_{450°} = 4_{90°}$

b) $2_{30°} \cdot 2_{135°} = 4_{165°}$ d) $(2_{30°})^2 \cdot 1_{300°} = 4_{60°} \cdot 1_{300°} = 4_{0°}$

Ejercicio 16:

Dados los números complejos:

$$z_1 = 1_{210°} \qquad z_2 = 3\ [cos\ (-30°) + i\ sen\ (-30°)]$$

calcula.

a) $\frac{z_1}{z_2}$ b) $\frac{(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2}{z_2}$

$z_1 = 1_{210^\circ} \qquad z_2 = 3_{330^\circ}$

a) $\dfrac{1_{210^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{1}{3_{240^\circ}}$

b) $\dfrac{(1_{210^\circ})^2 \cdot 3_{30^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{1_{420^\circ} \cdot 3_{30^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{3_{450^\circ}}{3_{330^\circ}} = 1_{120^\circ}$

Ejercicio 17:

Dados los números complejos:

$$z_1 = 4_{330^\circ} \qquad z_2 = \cos 120^\circ + i \,\text{sen}\, 120^\circ \qquad z_3 = 1 - i$$

calcula.

a) $(z_1)^2$ b) $(z_2)^3$ c) $(z_3)^4 \cdot \bar{z}_3$ d) $(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2$

$z_1 = 4_{330^\circ} \qquad z_2 = 1_{120^\circ} \qquad z_3 = \sqrt{2}_{\,315^\circ}$

a) $(4_{330^\circ})^2 = 16_{660^\circ} = 16_{300^\circ}$

b) $(1_{120^\circ})^3 = 1_{0^\circ}$

c) $\left(\sqrt{2}_{\,315^\circ}\right)^4 \cdot \sqrt{2}_{\,45^\circ} = 4_{1.260^\circ} \cdot \sqrt{2}_{\,45^\circ} = 4\sqrt{2}_{\,1.305^\circ} = 4\sqrt{2}_{\,225^\circ}$

d) $(4_{330^\circ})^2 \cdot 1_{240^\circ} = 16_{660^\circ} \cdot 1_{240^\circ} = 16_{900^\circ} = 16_{180^\circ} = -16$

Ejercicio 18:

Resuelve esta operación.

$$[16\,(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\, 60^\circ)] \cdot (2_{210^\circ})^4$$

$$[16\,(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\, 60^\circ)] \cdot (2_{210^\circ})^4 = 16_{60^\circ} \cdot 16_{840^\circ} = 256_{900^\circ} = 256_{180^\circ}$$

Ejercicio 19:

Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt{3_{150^\circ}}$ c) $\sqrt[4]{-i}$

b) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[3]{-1+i}$

a) $\sqrt{3_{150^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo: $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{150^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{150^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{2} = 255^\circ$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{75^\circ}$ y $\sqrt{3}_{255^\circ}$.

b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 180^\circ$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 300^\circ$$

Por tanto, las raíces son 3_{60°, $3_{180^\circ} = -3$ y 3_{300°.

c) $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1_{270^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 67^\circ\, 30'$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 157^\circ\, 30'$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 247^\circ\, 30'$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{270^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 337^\circ\, 30'$$

Por tanto, las raíces son $1_{67^\circ\, 30'}$, $1_{157^\circ\, 30'}$, $1_{247^\circ\, 30'}$ y $1_{337^\circ\, 30'}$.

d) $\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{135°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: $\sqrt[6]{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{135° + 0 \cdot 360°}{3} = 45°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{135° + 1 \cdot 360°}{3} = 165°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 285°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[6]{2}_{45°}$, $\sqrt[6]{2}_{165°}$ y $\sqrt[6]{2}_{285°}$.

<u>Ejercicio 20</u>:

Resuelve estas ecuaciones.

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^2 + 16 = 0$

c) $z^3 + 8 = 0$

d) $z^3 - 8 = 19$

a) $z^4 - 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{0° + 0 \cdot 360°}{4} = 0°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{0° + 1 \cdot 360°}{4} = 90°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{0° + 2 \cdot 360°}{4} = 180°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{0° + 3 \cdot 360°}{4} = 270°$$

Por tanto, las raíces son $1_{0°} = 1$, $1_{90°} = i$, $1_{180°} = -1$ y $1_{270°} = -i$.

b) $z^2 + 16 = 0 \rightarrow z = \sqrt{-16} = \sqrt{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo: 4.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{2} = 90°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{2} = 270°$$

Por tanto, las raíces son $4_{90°} = 4i$ y $4_{270°} = -4i$.

c) $z^3 + 8 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-8} \rightarrow z = \sqrt[3]{8_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$$

Por tanto, las raíces son $2_{60°}$, $2_{180°}$ y $2_{300°}$.

d) $z^3 - 8 = 19 \rightarrow z = \sqrt[3]{27} \rightarrow z = \sqrt[3]{27_{0°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{0° + 0 \cdot 360°}{3} = 0°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{0° + 1 \cdot 360°}{3} = 120°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{0° + 2 \cdot 360°}{3} = 240°$$

Por tanto, las raíces son $3_{0°}$, $3_{120°}$ y $3_{240°}$.

Ejercicio 21:

Calcula y representa las raíces cúbicas de este número.

$$\frac{1+i}{-1-i}$$

$$\frac{1+i}{-1-i}=\frac{(1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{-1-1}{1+1}=-1=1_{180°}$$

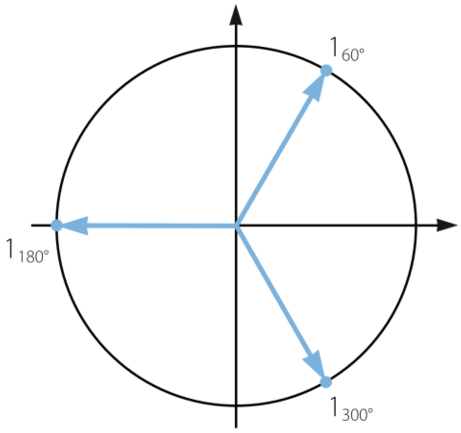
Módulo: $\sqrt[3]{1}=1$

Argumentos:

$$\text{Si } k=0 \to \beta_1=\frac{180°+0\cdot 360°}{3}=60°$$

$$\text{Si } k=1 \to \beta_2=\frac{180°+1\cdot 360°}{3}=180°$$

$$\text{Si } k=2 \to \beta_3=\frac{180°+2\cdot 360°}{3}=300°$$



Por tanto, las raíces son $1_{60°}$, $1_{180°}$ y $1_{300°}$.

Ejercicio 22:

Resuelve estas ecuaciones, y expresa sus soluciones en forma compleja.

a) $x^2+4=0$ b) $2x^2-2x+1=0$ c) $2x^2-x+5=0$

a) $x^2+4=0 \to x=\sqrt{-4} \to \begin{cases} x_1=2i \\ x_2=-2i \end{cases}$

b) $2x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 2\cdot 1}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{4}\to\begin{cases} x_1=\dfrac{1+i}{2} \\ x_2=\dfrac{1-i}{2} \end{cases}$$

c) $2x^2-x+5=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot 5}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-39}}{2}\to\begin{cases} x_1=\dfrac{1+\sqrt{39}\,i}{2} \\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{39}\,i}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 23:

Efectúa las divisiones.

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}$ b) $\dfrac{20+40i}{8+6i}$ c) $\dfrac{-1+5i}{2-i}$

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}=\dfrac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{-3-2i+15i-10}{9+4}=\dfrac{-13+13i}{13}=-1+i$

b) $\dfrac{20+40i}{8+6i}=\dfrac{(20+40i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)}=\dfrac{160-120i+320i+240}{64+36}=4+2i$

c) $\dfrac{-1+5i}{2-i}=\dfrac{(-1+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{-2-i+10i-5}{4+1}=\dfrac{-7+9i}{5}$

Ejercicio 24:

Obtén, en forma binómica, el resultado de las operaciones.

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i$

b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}$

c) $\dfrac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)$

d) $(-2-5i)-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}$

e) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}$

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i=-3+9i+(3+2i)=11i$

b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}=2i+\dfrac{9}{10}+\dfrac{33}{10}i=\dfrac{9}{10}+\dfrac{53}{10}i$

c) $\dfrac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)=\dfrac{48-4i}{2-6i}-(6+18i-2i+6)=$

$=3+7i-(12+16i)=-9-9i$

d) $(-2-5i)-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}=(-2-5i)-\dfrac{5-15i}{3-i}=$
$=(-2-5i)-(3-4i)=-5-i$

e) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}=\dfrac{-8+6i+4}{-3+4i}=\dfrac{36}{25}-\dfrac{2}{25}i$

Ejercicio 25:

Calcula *a, b, c, …*, para que se verifiquen las condiciones indicadas en cada apartado.

a) $(3-5i)+(-1+ai)$ es un número real.

b) $(b+3i)+(5+2i)$ es un número imaginario puro.

c) $(c+6i)(3-2i)$ es un número real.

d) $(d+6i)(3-2i)$ es un número imaginario puro.

e) $\dfrac{7+11i}{e-2i}$ es un número real.

f) $\dfrac{7+11i}{f-2i}$ es un número imaginario puro.

a) $(3-5i)+(-1+ai)=2+(-5+a)i\rightarrow a=5$

b) $(b+3i)+(5+2i)=(b+5)+5i\rightarrow b=-5$

c) $(c+6i)(3-2i)=(3c+12)+(-2c+18)i\rightarrow -2c+18=0\rightarrow c=9$

d) $(d+6i)(3-2i)=(3d+12)+(-2d+18)i\rightarrow 3d+12=0\rightarrow d=-4$

e) $\dfrac{7+11i}{e-2i}=\dfrac{(7+11i)(e+2i)}{(e-2i)(e+2i)}=\dfrac{7e-22}{e^2+4}+\dfrac{11e+14}{e^2+4}i\rightarrow\dfrac{11e+14}{e^2+4}=0$
$\rightarrow e=-\dfrac{14}{11}$

f) $\dfrac{7+11i}{f-2i}=\dfrac{(7+11i)(f+2i)}{(f-2i)(f+2i)}=\dfrac{7f-22}{f^2+4}+\dfrac{11f+14}{f^2+4}i\rightarrow\dfrac{7f-22}{f^2+4}=0$
$\rightarrow f=\dfrac{22}{7}$

Ejercicio 26:

Encuentra p y q para que se cumpla:

$$(p+3i)(4+qi)=15+9i$$

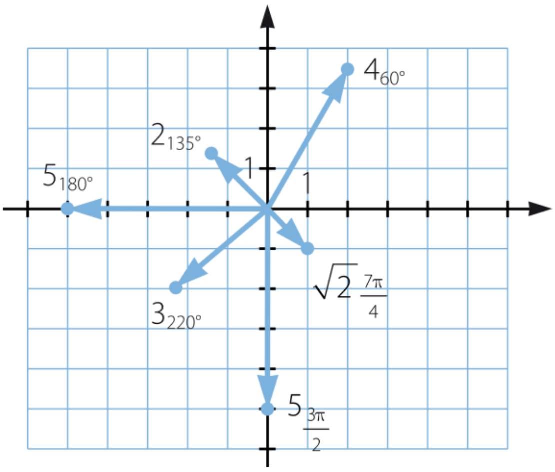
$$(p+3i)(4+qi)=15+9i \to (4p-3q)+(12+pq)i=15+9i$$

$$\left.\begin{matrix} 4p-3q=15 \\ 12+pq=9 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} p_1=3;\ q_1=-1 \\ p_2=\dfrac{3}{4};\ q_2=-4 \end{cases}$$

Ejercicio 27:

Representa los siguientes números complejos expresados en forma polar.

a) $4_{60°}$ b) $2_{135°}$ c) $3_{220°}$ d) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$ e) $5_{180°}$ f) $5_{\frac{3\pi}{2}}$



Ejercicio 28:

Realiza las siguientes potencias, empleando la fórmula de Moivre.

a) $\left(3\,(\cos 25° + i \ \text{sen}\ 25°)\right)^4$

b) $\left(2\,(\cos 40° + i \ \text{sen}\ 40°)\right)^9$

c) $\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{3}\right)^3$

d) $\left(3\left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i \ \text{sen}\ \dfrac{3\pi}{2}\right)\right)^4$

a) $(3\,(cos\, 25° + i\, sen\, 25°))^4 = 81\,(cos\, 100° + i\, sen\, 100°)$

b) $(2\,(cos\, 40° + i\, sen\, 40°))^9 = 512\,(cos\, 0° + i\, sen\, 0°) = 512$

c) $\left(cos\,\frac{\pi}{3} + i\;sen\,\frac{\pi}{3}\right)^3 = cos\,\pi + i\;sen\,\pi = -1$

d) $\left(3\left(cos\,\frac{3\pi}{2} + i\;sen\,\frac{3\pi}{2}\right)\right)^4 = 81\,(cos\,0 + i\;sen\,0) = 81$

Ejercicio 30:

Calcula las soluciones de las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$ **b)** $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}}$ **c)** $\sqrt[4]{9_{220°}}$

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 4.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{120° + 0 \cdot 360°}{3} = 40°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{120° + 1 \cdot 360°}{3} = 160°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{120° + 2 \cdot 360°}{3} = 280°$$

Por tanto, las raíces son $4_{40°}$, $4_{160°}$ y $4_{280°}$.

b) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt[5]{32_{225°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta del módulo: 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{225° + 0 \cdot 360°}{5} = 45°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{225° + 1 \cdot 360°}{5} = 117°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{225° + 2 \cdot 360°}{5} = 189°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{225° + 3 \cdot 360°}{5} = 261°$$

$$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{225° + 4 \cdot 360°}{5} = 333°$$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{117°}$, $2_{189°}$, $2_{261°}$ y $2_{333°}$.

c) $\sqrt[4]{9_{220°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{220° + 0 \cdot 360°}{4} = 55°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{220° + 1 \cdot 360°}{4} = 145°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{220° + 2 \cdot 360°}{4} = 235°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{220° + 3 \cdot 360°}{4} = 325°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{55°}$, $\sqrt{3}_{145°}$, $\sqrt{3}_{235°}$ y $\sqrt{3}_{325°}$.

Ejercicio 31:

Realiza la siguiente operación.

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}} = \sqrt[4]{\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} = \sqrt[4]{\frac{2i}{2}} = \sqrt[4]{i} = 1_{\frac{90^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}$$

Si $k=0 \rightarrow x_1 = 2_{22,5^\circ}$

Si $k=1 \rightarrow x_2 = 2_{112,5^\circ}$

Si $k=2 \rightarrow x_3 = 2_{202,5^\circ}$

Si $k=3 \rightarrow x_4 = 2_{292,5^\circ}$

Ejercicio 32:

Expresa en forma polar el inverso de estos números.

a) 2_{150° b) $3_{\frac{\pi}{2}}$ c) $4_{\frac{\pi}{3}}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)_{\pi}$

Para calcular el inverso de un número en forma polar, calculamos el inverso del módulo y el opuesto del argumento.

a) $\frac{1}{2}_{\,210^\circ}$ b) $\frac{1}{3}_{\frac{3\pi}{2}}$ c) $\frac{1}{4}_{\frac{5\pi}{3}}$ d) $4_\pi = -4$