

EJERCICIOS RESUELTOS HOJA 2

UNIDAD 11: FUNCION REAL DE VARIABLE REAL. FUNCIONES ELEMENTALES

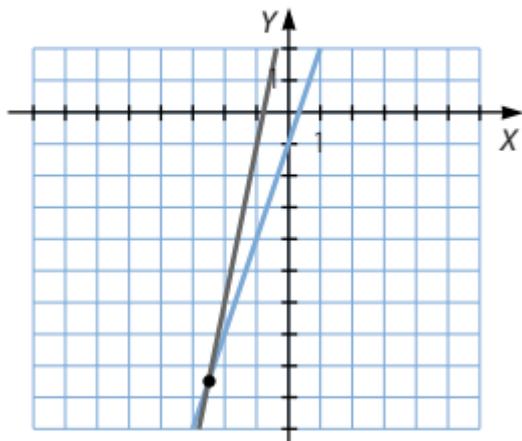
Cuestión 1:

Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(-2, 3)$.

$$m = -\frac{1}{2}$$

Cuestión 2:

Representa, sobre los mismos ejes de coordenadas, las funciones $y = 3x - 1$ e $y = 5x + 4$. Halla el punto común a las dos gráficas.



El punto de intersección es:

$$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{17}{2}\right)$$

Cuestión 3:

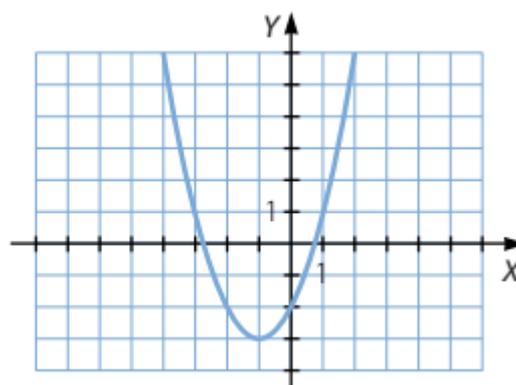
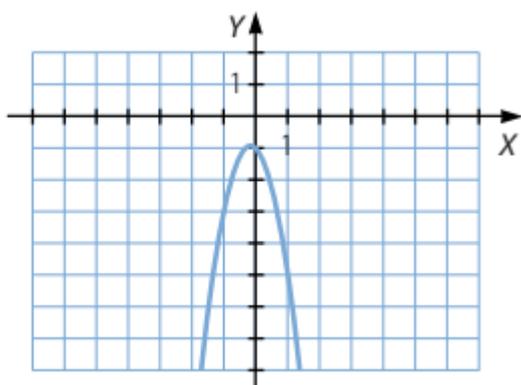
Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.

a) $y = -3x^2 - x - 1$

b) $y = x^2 + 2x - 2$

a) $V\left(-\frac{1}{6}, -\frac{11}{12}\right)$

b) $V(-1, -3)$



Cuestión 4:

Representa las parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$

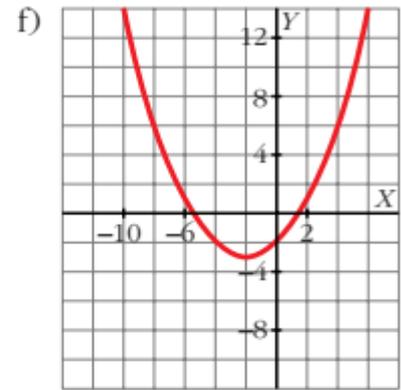
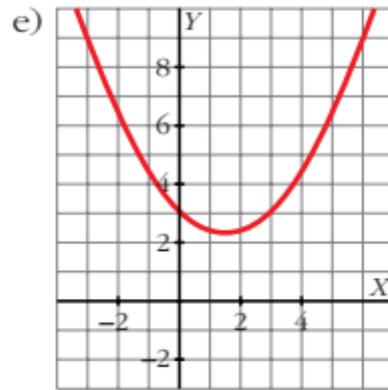
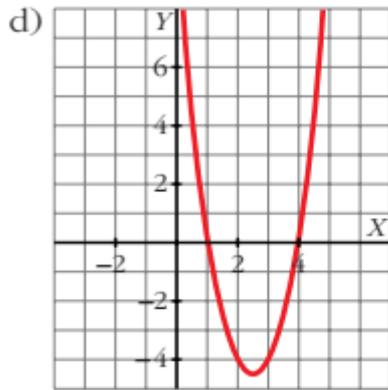
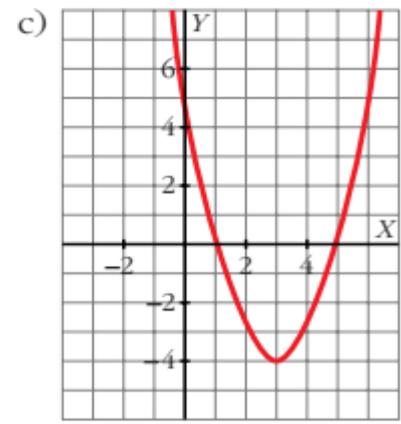
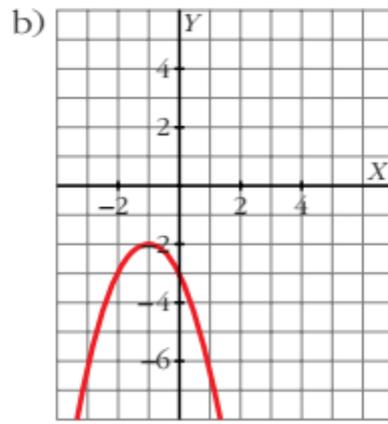
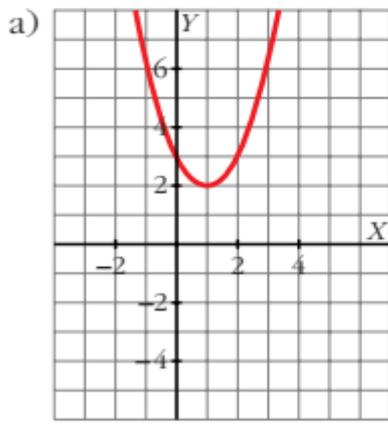
b) $y = -x^2 - 2x - 3$

c) $y = x^2 - 6x + 5$

d) $y = 2x^2 - 10x + 8$

e) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

f) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$



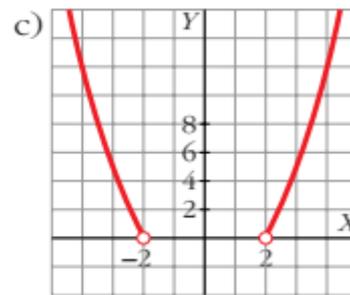
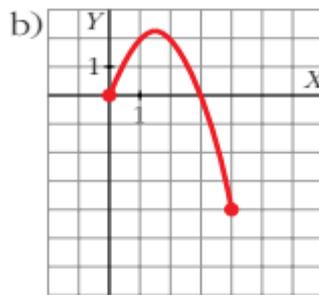
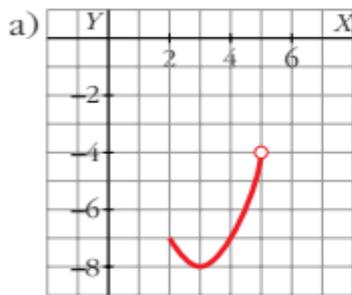
Cuestión 5:

Representa las funciones:

a) $y = x^2 - 6x + 1, x \in [2, 5]$

b) $y = -x^2 + 3x, x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4, x \in (-\infty, -2) \cup (2, -\infty)$

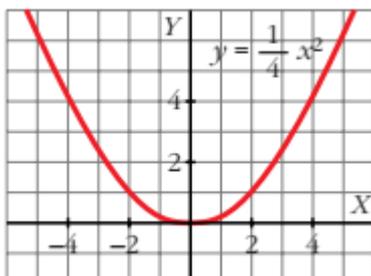


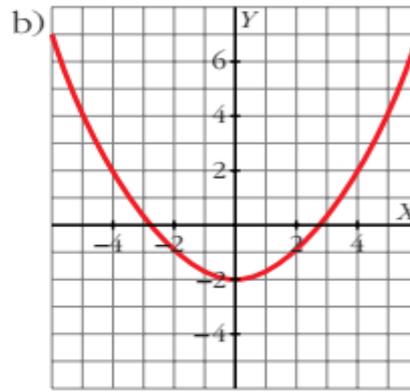
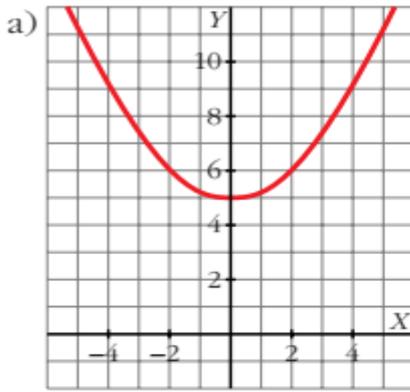
Cuestión 6:

Representa $y = \frac{1}{4} x^2$. A partir de ella, representa:

a) $y = \frac{1}{4} x^2 + 5$

b) $y = \frac{1}{4} x^2 - 2$



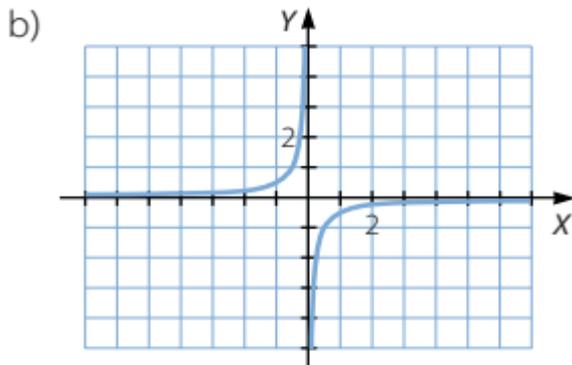
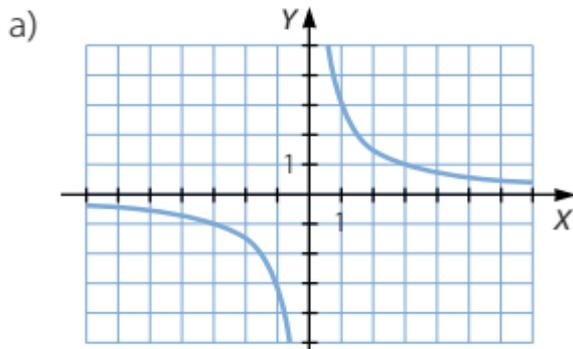


Cuestión 7:

Representa gráficamente las siguientes funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{3}{x}$

b) $y = -\frac{1}{2x}$



Cuestión 8:

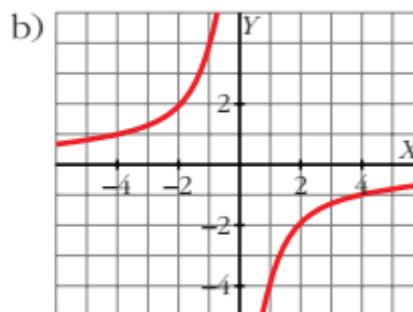
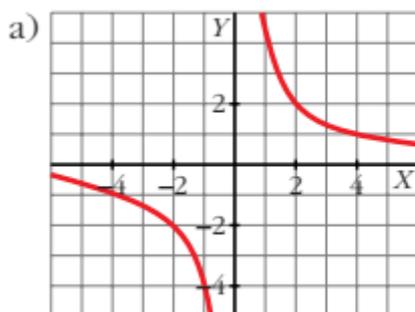
Representa:

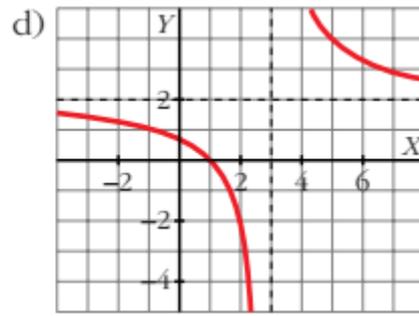
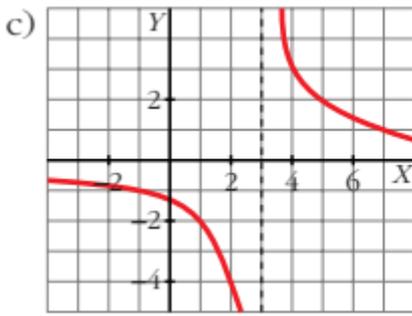
a) $y = \frac{4}{x}$

b) $y = -\frac{4}{x}$

c) $y = \frac{4}{x-3}$

d) $y = \frac{4}{x-3} + 2$



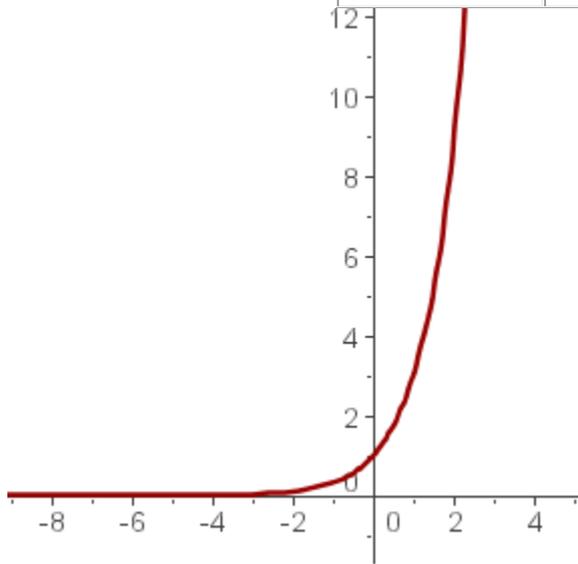


Cuestión 9:

Representa las funciones exponenciales:

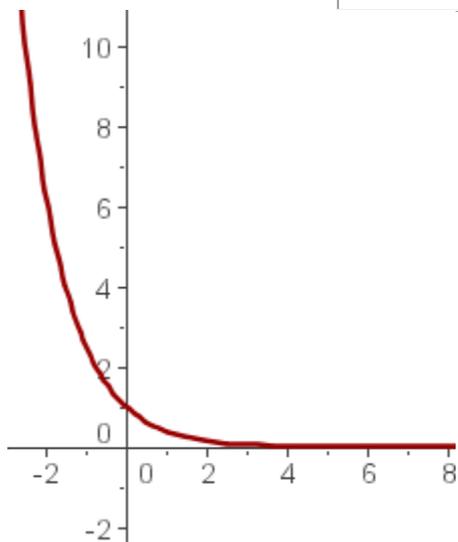
a) $f(x) = 3^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27



b) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$	15.625	6.25	2.5	1	0.4	0.16	0.064

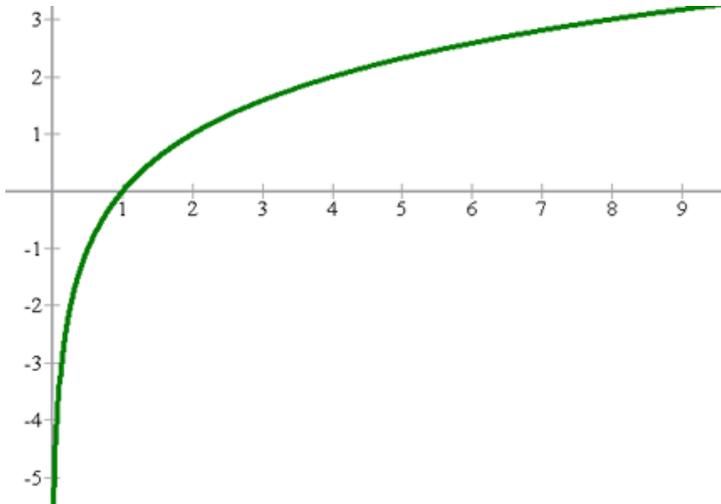


Cuestión 10:

Representa las funciones logarítmicas:

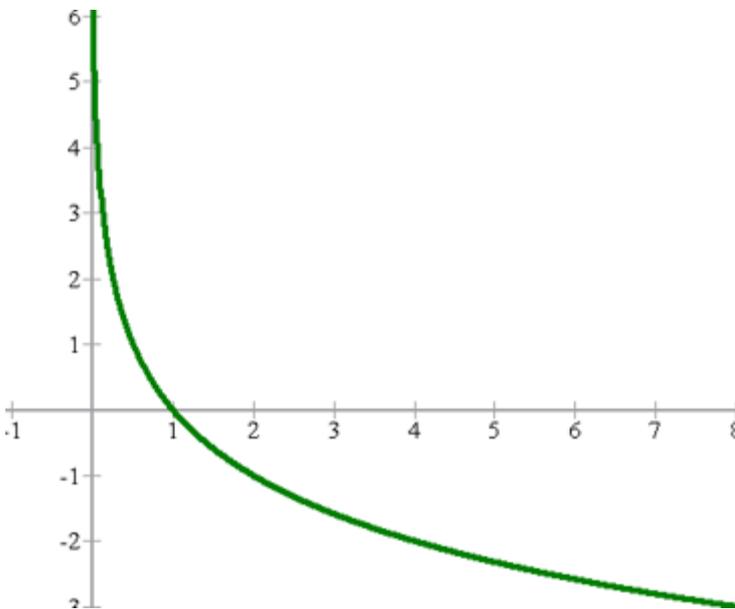
a) $f(x) = \log_2 x$

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3



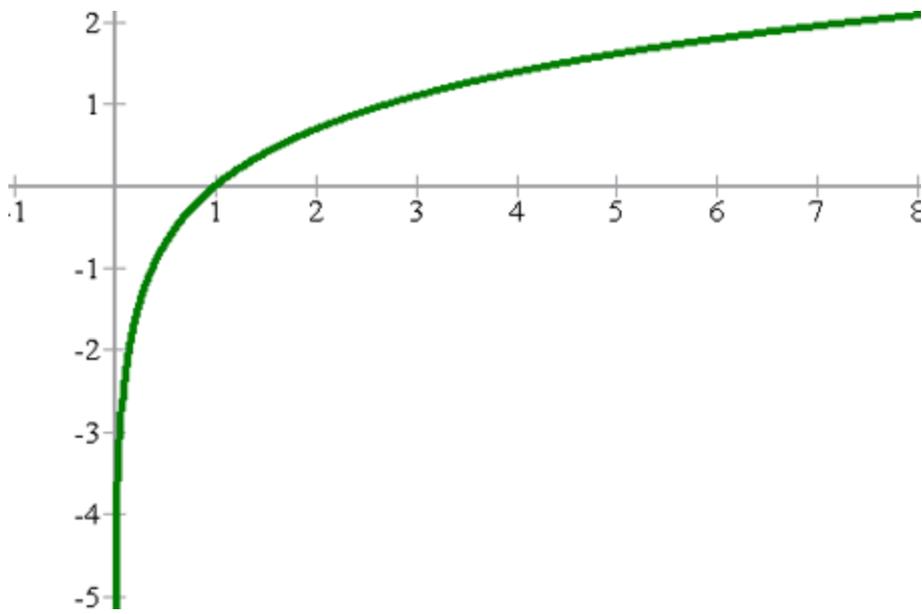
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
f(x)	3	2	1	0	-1	-2	-3



c) $f(x) = \ln x$

x	0.1	0.5	1	2	3	4	5
f(x)	-2.3	-0.7	0	0.7	1.1	1.4	1.6



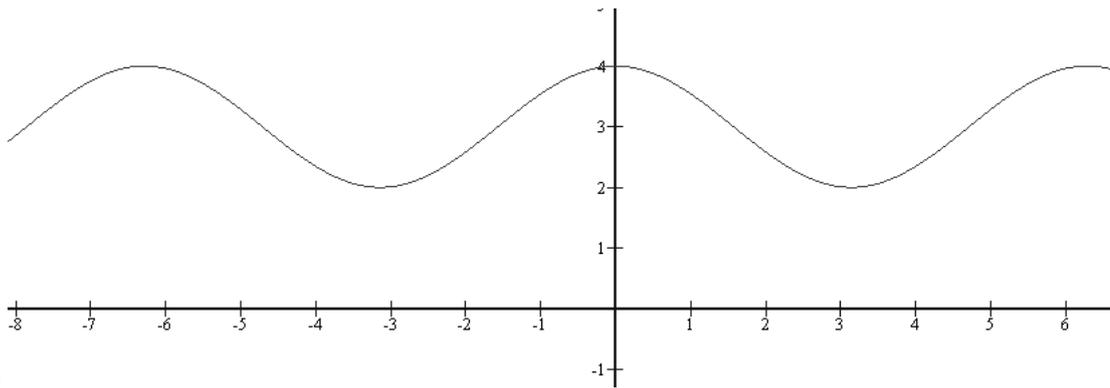
Cuestión 11:

Representar gráficamente las siguientes funciones:

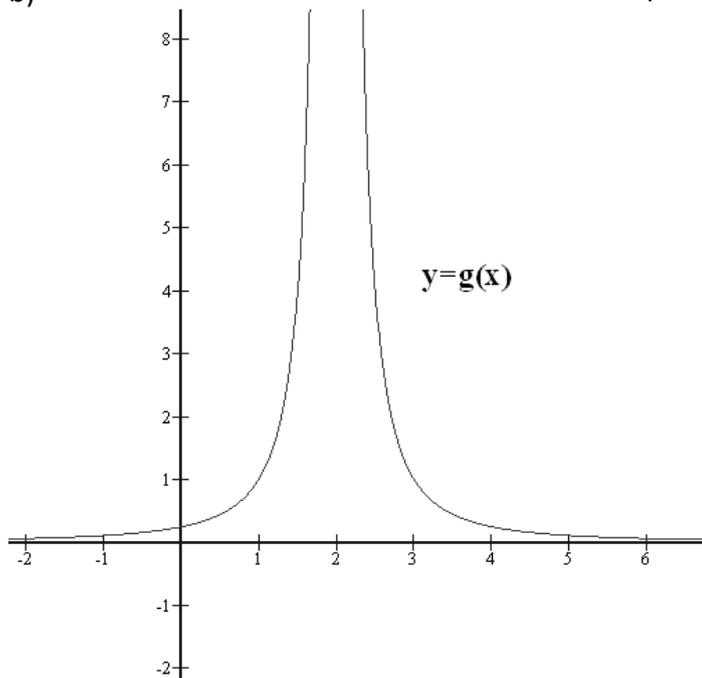
a) $f(x) = 3 + \cos x$ b) $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ c) $h(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

SOLUCIONES

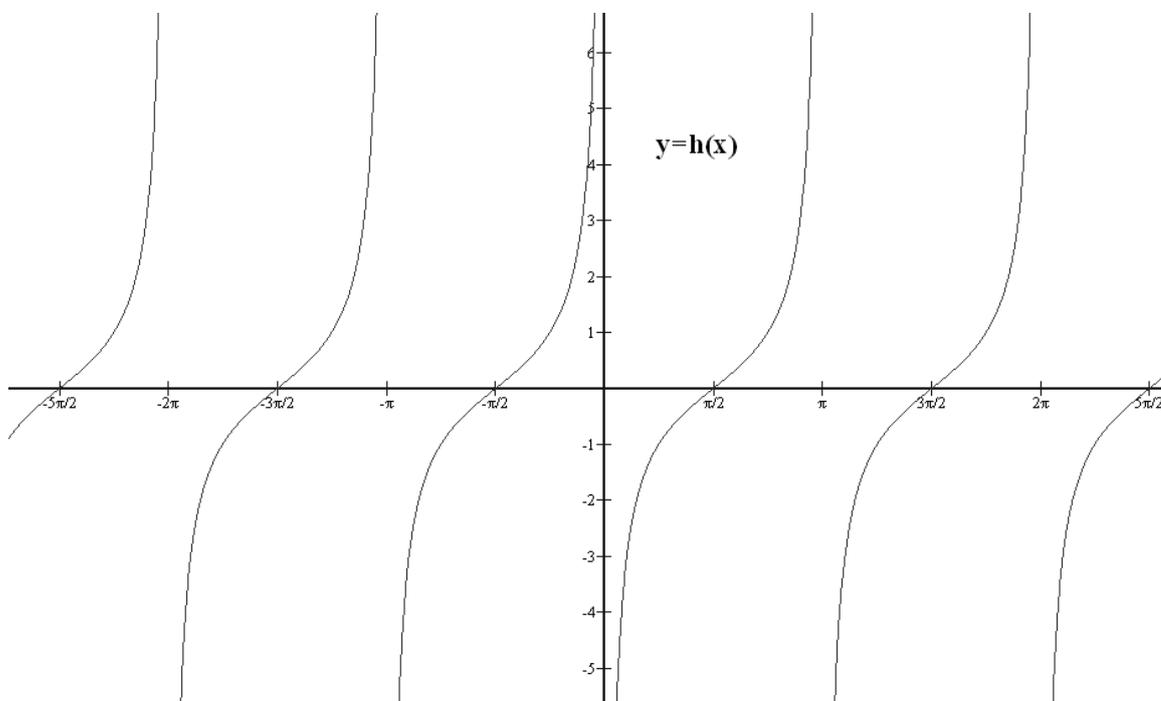
a)



b)



c)



Cuestión 12:

Dadas las siguientes funciones, se pide:

- | | | | |
|-----------------|---------------------------|-----------------------|--------------|
| a) Dominio | b) Representación gráfica | c) Imagen o recorrido | d) Monotonía |
| e) Acotación | f) Extremos relativos | g) Extremos absolutos | h) Simetría |
| i) Periodicidad | | | |

$$1^{\circ}) f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \ln x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$2^{\circ}) g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ 2 & \text{si } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

$$3^{\circ}) h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ 3^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$4^{\circ}) m(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2\pi \\ \text{sen } x & \text{si } -2\pi < x < 2\pi \\ -2 & \text{si } x > 2\pi \end{cases}$$

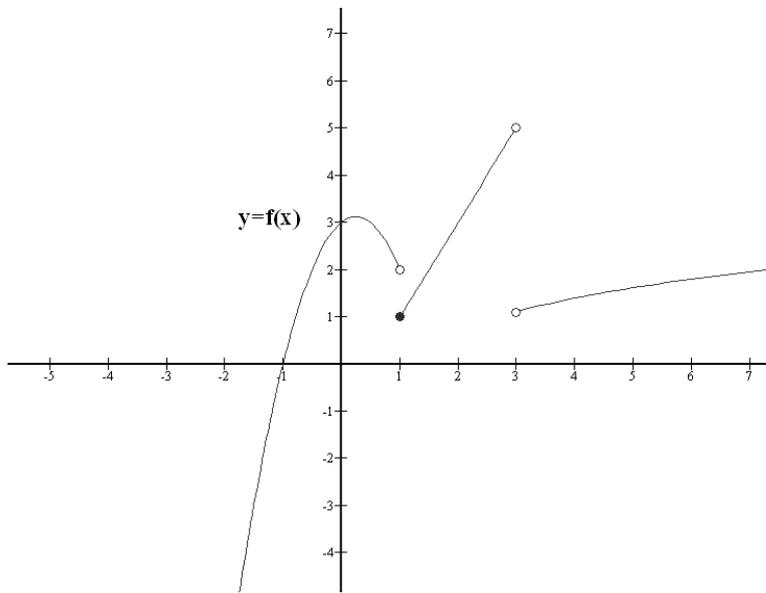
$$5^{\circ}) n(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x^3} \right| & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$6^{\circ}) r(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } -5 \leq x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ -2x^2 + 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1^o) a) Dom f = R - {3} c) Im f = R d) f creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$; f decreciente en $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$

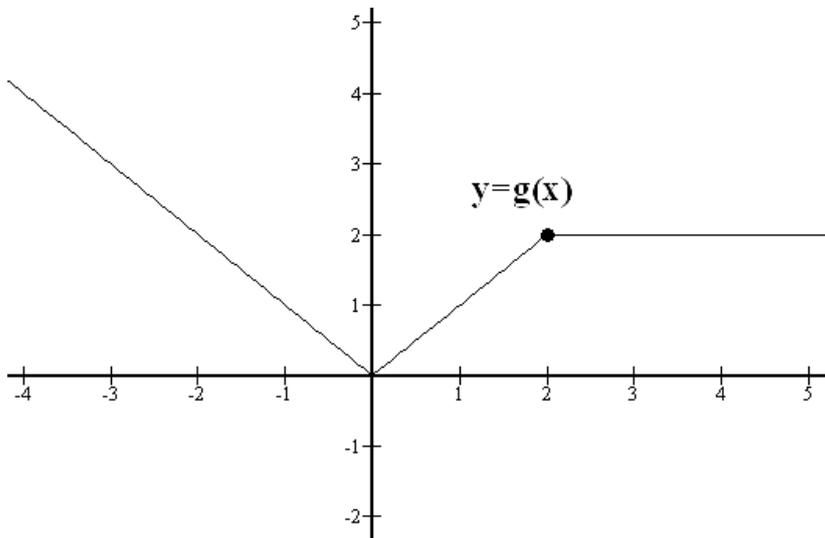
e) No está acotada f) Máximo relativo en $x_0 = \frac{1}{4}$ g) No tiene h) e i) No hay



b)

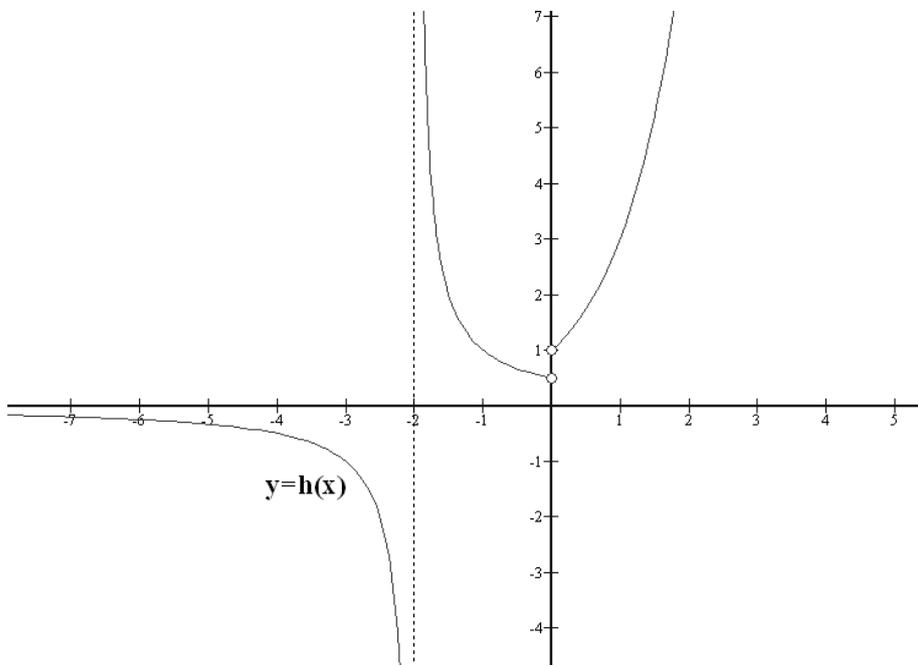
2º) a) $\text{Dom } g = \mathbb{R}$ c) $\text{Recorr } (g) = [0, +\infty)$ d) f creciente en $(0,2)$; f decreciente en $(-\infty,0)$; f constante en $(2,+\infty)$ e) Acotada inferiormente con ínfimo 0 f) y g) Mínimo relativo y absoluto en $(0,0)$ h) e i) No hay

b)

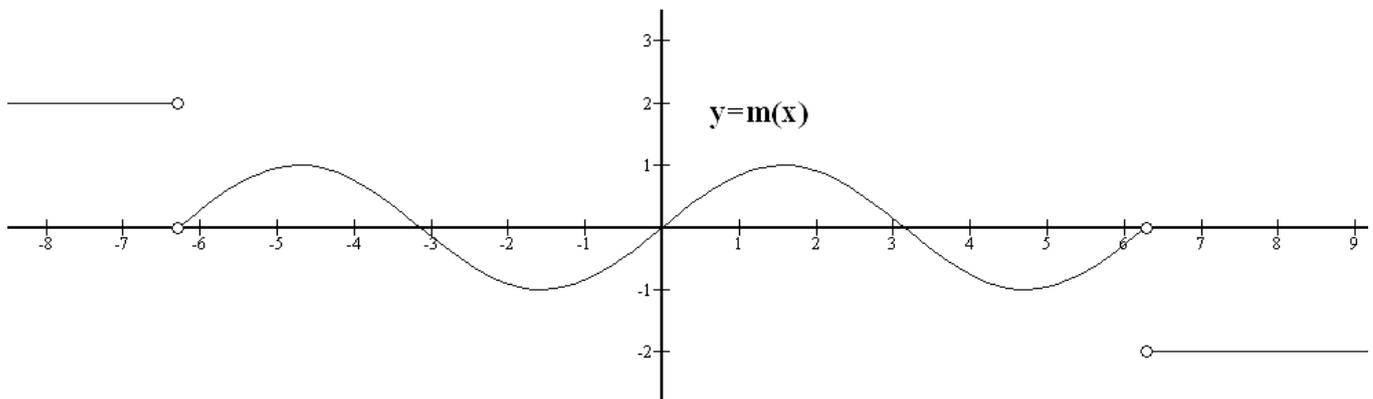


3º) a) $\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{-2,0\}$ c) $\text{Im } h = (-\infty,0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ d) f creciente en $(0,+\infty)$; f decreciente en $(-\infty,-2) \cup (-2,0)$ e) No está acotada f) y g) No tiene h) e i) No tiene

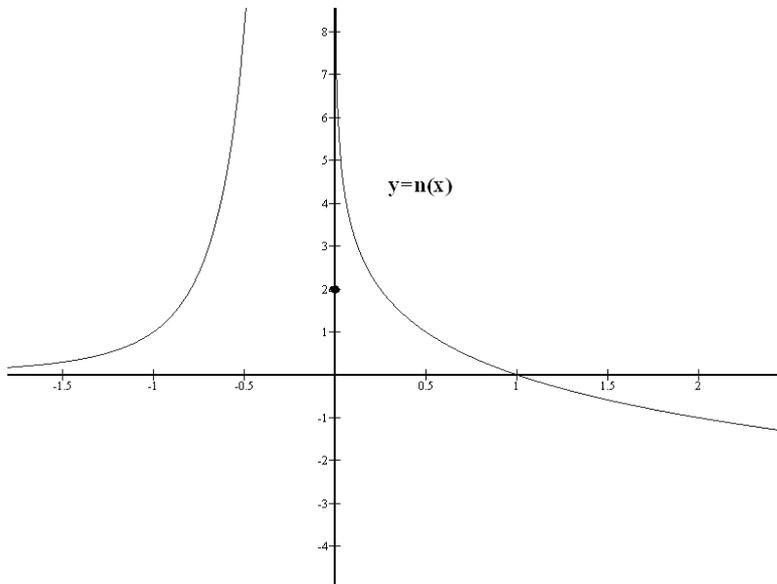
b)



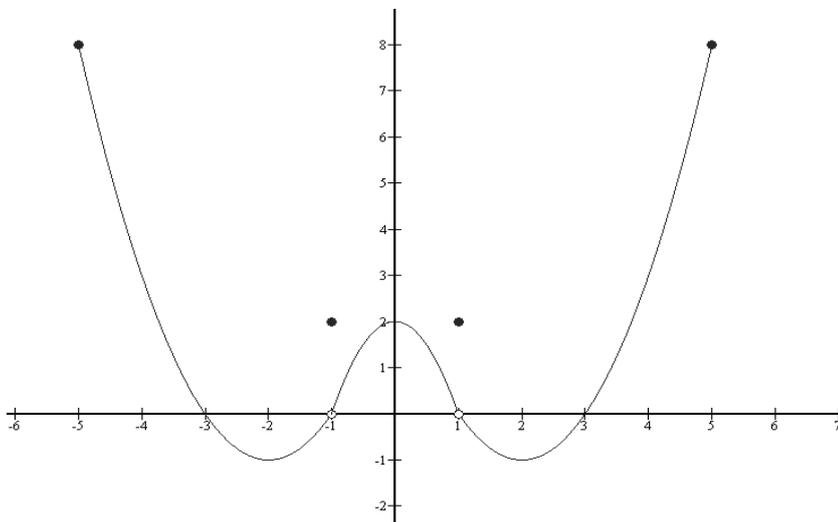
- 4º) a) $\text{Dom } m = \mathbb{R} - \{2\pi, -2\pi\}$ c) $\text{Im } h = [-1, 1] \cup \{2, -2\}$ d) f creciente en $\left(-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; f decreciente en $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; f constante en $(-\infty, -2\pi)$; f constante en $(2\pi, +\infty)$ e) Acotada con supremo 2 e ínfimo -2 f) Máximos relativos en $\left(\frac{-3\pi}{2}, 1\right)$ y en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; Mínimos relativos en $\left(\frac{-\pi}{2}, -1\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ g) Infinitos máximos absolutos para todo $x_0 < -2\pi$; Infinitos mínimos absolutos para todo $x_0 > 2\pi$ h) Impar i) No tiene
- b)



- 5º) a) $\text{Dom } n = \mathbb{R}$ c) $\text{Im } h = \mathbb{R}$ d) f creciente en $(-\infty, 0)$; f decreciente en $(0, +\infty)$ e) No está acotada f) y g) No tiene h) e i) No tiene
- b)



6º) a) Dom $n = [-5, 5]$ c) Im $h = [-1, 8]$ d) f creciente en $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, 5)$; f decreciente en $(-5, -2) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ e) Acotada con supremo 8 e ínfimo -1 f) y g) Máximo relativo en $(0, 2)$ y mínimos relativos y absolutos en $(-2, -2)$ y $(2, -1)$. Máximos absolutos y relativos en $(-5, 8)$ y $(5, 8)$ en h) Par i) No tiene



b)

Cuestión 13:

Representa la siguiente función, sabiendo que:

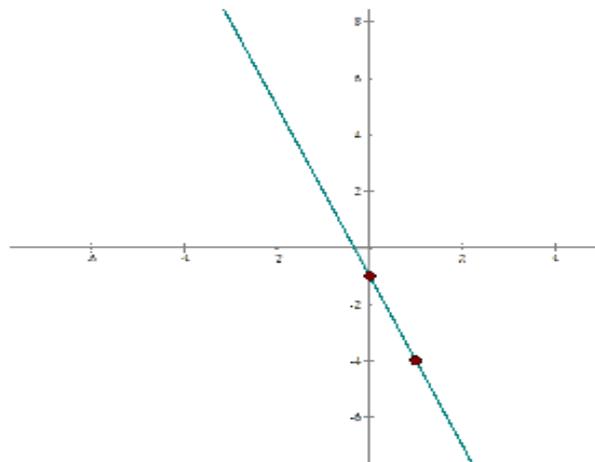
Tiene pendiente -3 y ordenada en el origen -1.

• $y = -3x - 1$

x $y = -3x - 1$

0 -1

1 -4



Cuestión 14:

Representa gráficamente la función cuadrática:

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

1. Vértice

$$x_v = -4 / -2 = 2 \quad y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -1 \quad \mathbf{V(2, 1)}$$

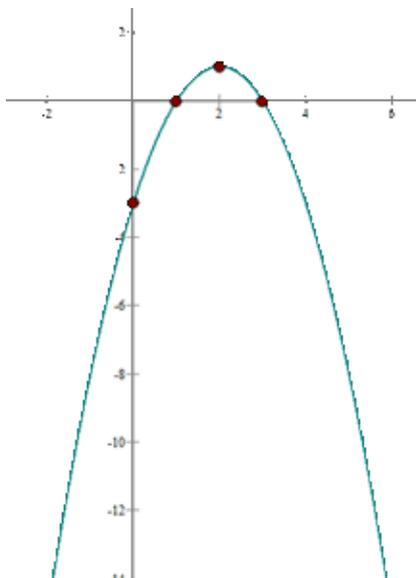
2. Puntos de corte con el eje OX.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 1 \quad \mathbf{(3, 0) \quad (1, 0)}$$

3. Punto de corte con el eje OY.

$$\mathbf{(0, -3)}$$



Cuestión 15:

Representa gráficamente la función cuadrática:

$$y = x^2 + x + 1$$

SOLUCIÓN:

1. Vértice

$$x_v = -1/2 \quad y_v = (-1/2)^2 + (-1/2) + 1 = 3/4$$

$$\mathbf{V(-1/2, 3/4)}$$

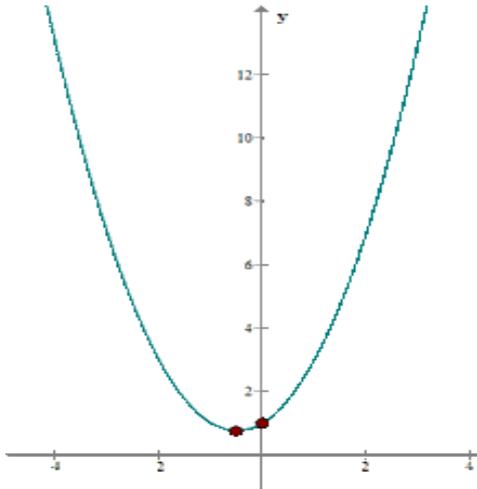
2. Puntos de corte con el eje OX.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

No hay puntos de corte con OX.

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, 1)



Cuestión 16:

Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcular el valor de a.

SOLUCIÓN:

$$9 = 1^2 + a \cdot 1 + a \rightarrow a = 4$$

Cuestión 17:

Una parábola tiene su vértice en el punto V(1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

La coordenada x del vértice es 1.

$$1 = -b / 2a \quad b = -2a$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = 2$$

$$2 = c$$

$$f(1) = 1$$

$$1 = a + b + 2 \quad 1 = a - 2a + 2$$

$$a = 1 \quad b = -2$$

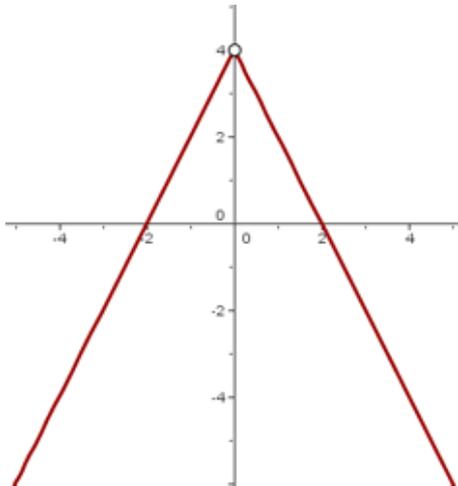
$$y = x^2 - 2x + 2$$

Cuestión 18:

Representa la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x > 0 \\ 4 - 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

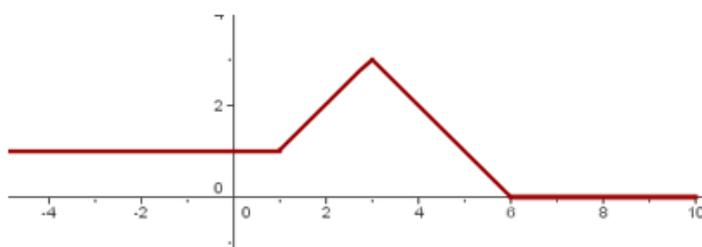
SOLUCIÓN:



Cuestión 19:

Representa las función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x + 6 & \text{si } 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{si } 6 < x \end{cases}$$

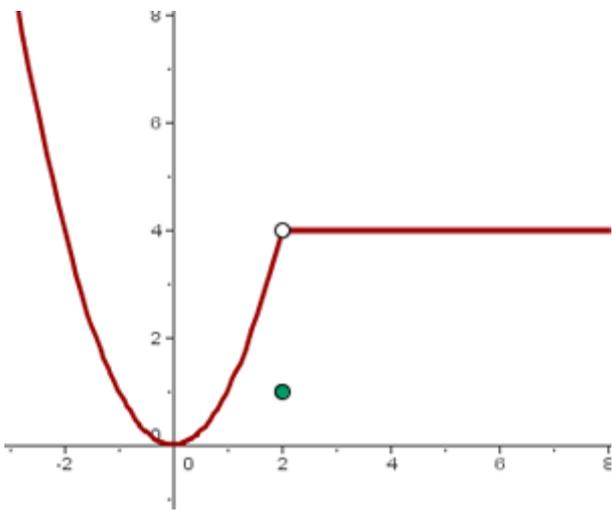


Cuestión 20:

Representa la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

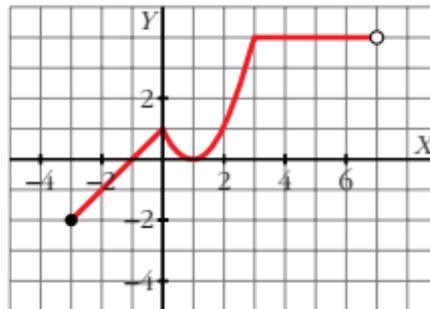
SOLUCIÓN:



Cuestión 21:

Representa esta función:

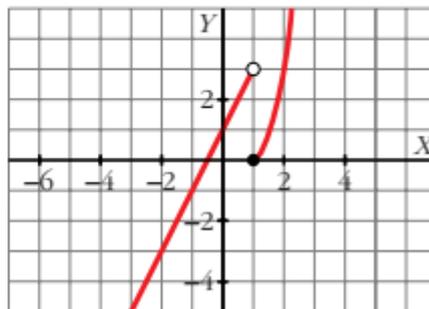
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [0, 3] \\ 4 & x \in (3, 7) \end{cases}$$



Cuestión 22:

Haz la representación gráfica de la siguiente función:

$$b) g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



Cuestión 23:

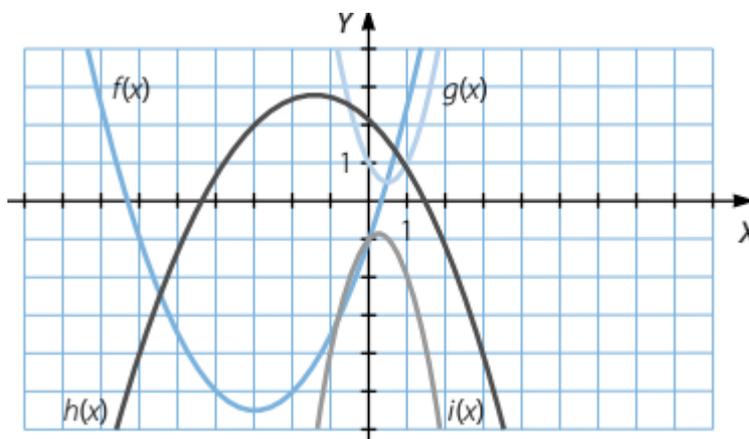
Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

a) $y = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

c) $y = -\frac{x^2}{3} - x + 2$

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$

d) $y = -2x^2 + x + 1$



- a) $y = f(x)$, porque si $a = \frac{1}{2} > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = -1$.
- b) $y = h(x)$, pues si $a = 2 > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = 1$.
- c) $y = g(x)$, porque si $a = -\frac{1}{3} < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = 2$.
- d) $y = i(x)$, ya que si $a = -2 < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = -1$.

Cuestión 24:

Escribe como funciones definidas a trozos.

a) $y = |x + 2|$

b) $y = |12 - 3x|$

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 12 - 3x & \text{si } x \leq 4 \\ -12 + 3x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Cuestión 25:

Escribe como una función definida a trozos y representa las funciones.

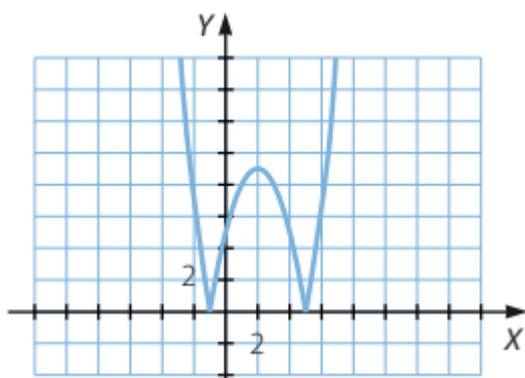
a) $y = |x^2 - 4x - 5|$

c) $y = |2x^2 - 7x + 3|$

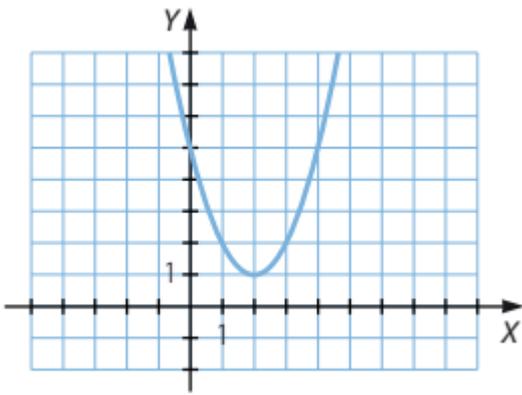
b) $y = |x^2 - 4x + 5|$

d) $y = |-x^2 + 4x - 5|$

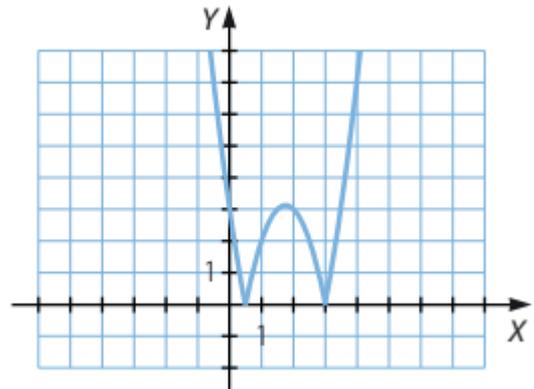
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \leq -1, x \geq 5 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 < x < 5 \end{cases}$



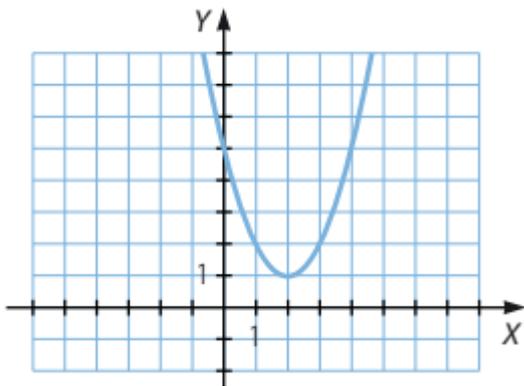
b)



$$c) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, x \geq 3 \\ -2x^2 + 7x - 3 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 3 \end{cases}$$

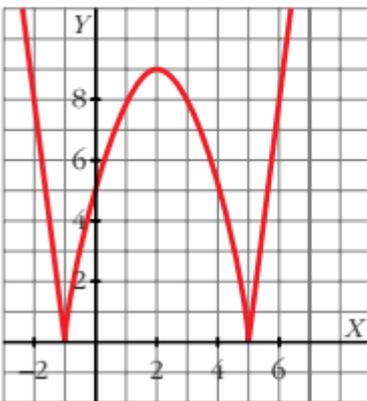


d)



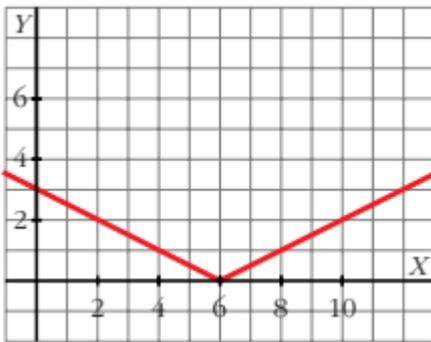
Cuestión 26:

Representa: $y = |-x^2 + 4x + 5|$



Cuestión 27:

Representa gráficamente: $y = \left| \frac{x}{2} - 3 \right|$



Cuestión 28:

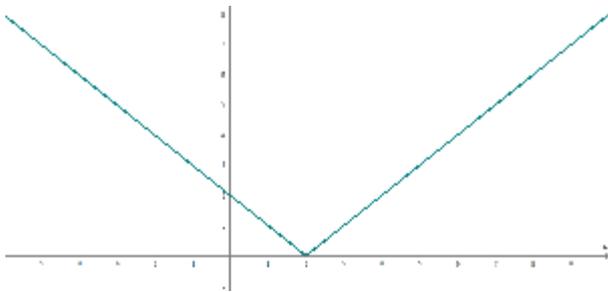
Representa la función: $f(x) = |x - 2|$

SOLUCIÓN:

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 2) & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



Cuestión 29:

Representa la función e indica su dominio:

$$f(x) = |x^2 - 5x + 6|$$

SOLUCIÓN:

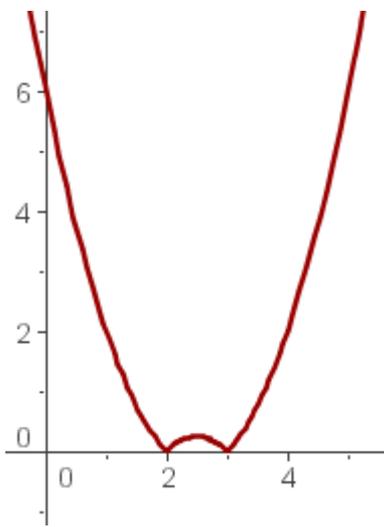
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 3$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si } x < 2 \\ -(x^2 - 5x + 6) & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Cuestión 30:

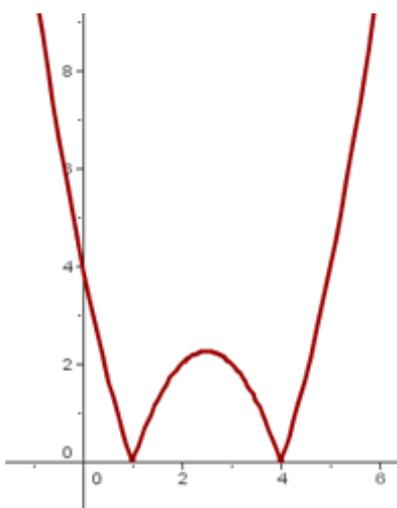
Representa la función: $f(x) = |-x^2 + 5x - 4|$

SOLUCIÓN:

$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ó } x = 4$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{si } x < 1 \\ -(x^2 - 5x + 4) & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ x^2 - 5x + 4 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$



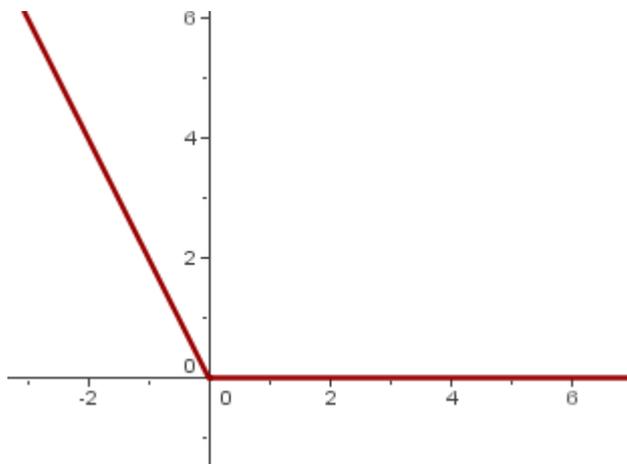
Cuestión 31:

Representa la función: $f(x) = |x| - x$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \begin{cases} -x - x & \text{si } x < 0 \\ x - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



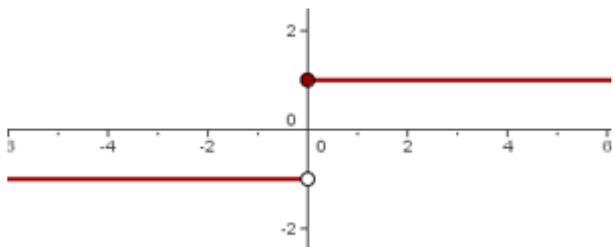
Cuestión 32:

Representa la función: $f(x) = |x| / x$

SOLUCIÓN:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



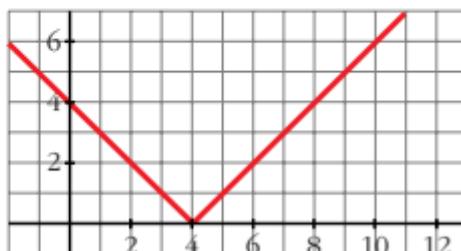
Cuestión 33:

Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos:

a) $y = |4 - x|$

b) $y = |x - 3|$

a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



$$b) y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

