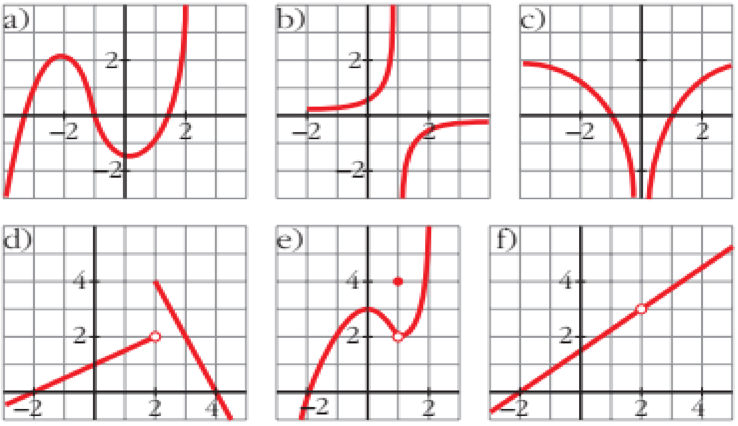
EJERCICIOS RESUELTOS HOJA 2
UNIDAD 12: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD.

Cuestión 1:

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

Cuestión 2:

Halla los puntos de discontinuidad, si los hay, de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + x - 6$

b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$

f) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

a) Continua.

b) 2

c) $-\dfrac{1}{2}$

d) Continua.

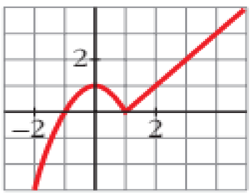
e) 0 y 5

f) Continua.

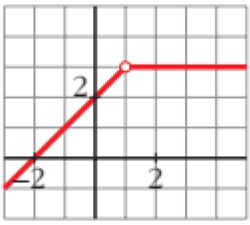
Cuestión 3:

Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica dada y di si son continuas o discontinuas en $x = 1$.

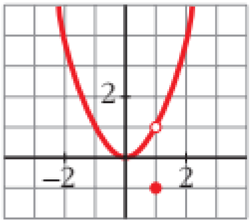
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Continua.

b) Discontinua.

c) Discontinua.

Cuestión 4:

Comprueba si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **es continua en** $x = 0$.

Recuerda que para que f ***sea continua en*** $x = 0$, ***debe verificarse que:***

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en $x = 0$.

Cuestión 5:

Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

a) No, pues no existe $f(-1)$.

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

Cuestión 6:

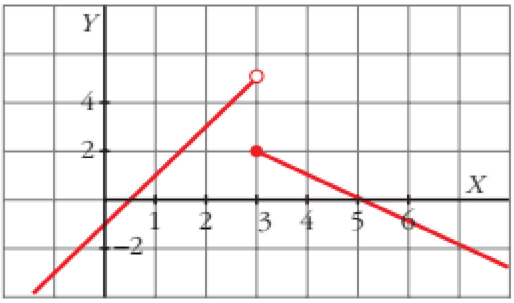
Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

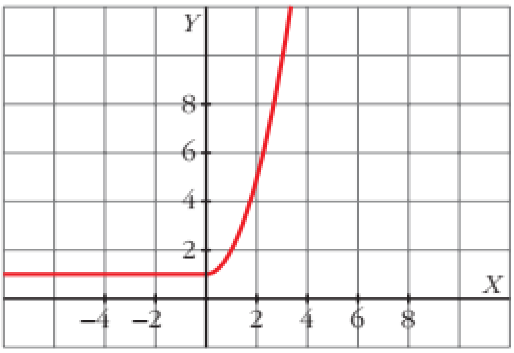
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

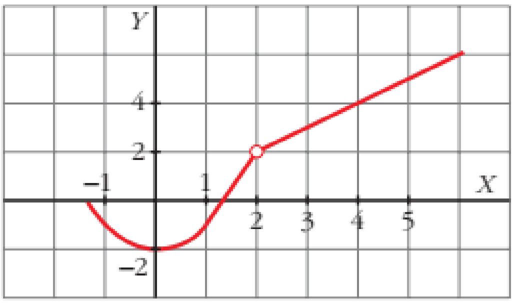
a) Discontinua en $x = 3$.



b) Función continua.



c) Discontinua en $x = 2$.



Cuestión 7:

Estudia la continuidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \rightarrow$ Continua en $x = 1$

$x \neq 1 \rightarrow$ Continua

Es continua en $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \rightarrow$ Continua en $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \rightarrow$ Continua en $x = 1$

$x \neq 1$ y $x \neq -1 \rightarrow$ Continua

Es continua en $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \rightarrow$ Discontinua en $x = 0$

Si $x \neq 0$, es continua.

Cuestión 8:

Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} (x^2-1)/(x-1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a \end{array}\right\} 2 = 4 - a \rightarrow a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array}\right\} a = 2$

Cuestión 9:

Justifica qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \left< \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{array} \right\}$$

Para que exista el límite, debe ser:

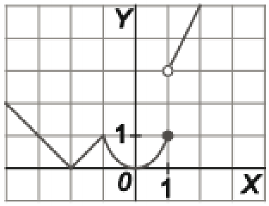
$a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

Cuestión 10:

Estudia la continuidad de la función y dibújala.

$$f(x)=\begin{cases}|x+2| & \text{si} \quad x\le -1\\ x^2 & \text{si} \quad -1<x\le 1\\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

Como cada una de las expresiones que definen *f* son funciones continuas, debemos ver qué ocurre en los extremos de los intervalos de definición:



$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}|x+2|=1$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2=1$, por tanto, es continua en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3$, por tanto, tiene una discontinuidad de salto finito en $x=1$.

Resumiendo, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

Cuestión 11:

Determinar *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x<0\\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x\le 3\\ x-5 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

Los únicos puntos donde podría no ser continua son los de abscisas $x=0$ y $x=3$. Para que *f* sea continua en ellos los límites laterales deben ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=b\\ 3a+b=-2\end{cases}\Rightarrow a=-1,\ b=1.$$

Para estos valores coincide el valor de la función en los puntos considerados con los límites calculados, por lo que la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Cuestión 12:

En cada caso, calcula los valores de *m* y *n* para que las funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases}3 & \text{si} \quad x\le 0\\ mx+n & \text{si} \quad 0<x<2\\ -1 & \text{si} \quad x\le 2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3mx-1 & \text{si} \quad x\le -1\\ nx^2-4m & \text{si} \quad -1<x\le 3\\ n+2 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

a) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=n\\ 2m+n=-1\end{cases}\Rightarrow m=-2,\ n=3$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3m-1=n-4m\\ 9n-4m=n+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m-n=1\\ -4m+8n=2\end{cases}\Rightarrow m=\dfrac{5}{2},\ n=\dfrac{3}{2}$

Cuestión 13:

Indica si la siguiente función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{1}{2|x|-x+1}$$

Tenemos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{-3x+1} & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$

El denominador de la primera expresión se anula en $x=\dfrac{1}{3}$ y el de la segunda en $x=-1$, por tanto, solo hay que comprobar si es continua en $x=0$. Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$ la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Cuestión 14:

Estudia la continuidad de las funciones en $x=3$, y si presentan discontinuidad, decide de qué tipo de discontinuidad se trata.

a) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x<3\\ 6 & \text{si } x=3\\ x^2-2x+3 & \text{si } x>3\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{x-3} & \text{si } x<3\\ x-15 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{x-1} & \text{si } x<3\\ 6 & \text{si } x=3\\ x-2 & \text{si } x>3\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x\ne 3\\ -2 & \text{si } x=3\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\ln\,(x-2) & \text{si } x<3\\ -2 & \text{si } x=3\\ sen\,(x-3) & \text{si } x>3\end{cases}$

a) $f(3)=6$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+3)=6\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-2x+3)=6\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$$

Como $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, la función es continua en $x=3$.

b) $f(3)=6$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{12}{x-1}=6\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-2)=1\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x)\text{, y la función no es continua en } x=3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

c) $f(3)=-2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\big(\ln(x-2)\big)=0\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} sen\,(x-3)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$$

Como $f(3)\ne\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, la función no es continua en $x=3$.

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

d) $f(3) = -12$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{12}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x-15) = -12\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x)\text{, y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

e) $f(3) = -2$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$$

Como $f(3) \neq \lim\limits_{x\to 3} f(x)$, la función no es continua en $x = 3$.

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

Cuestión 15:

¿Qué valor debe tomar a para que las funciones sean continuas?

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ -2x-7 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} tg\ \dfrac{-\pi}{2x} & \text{si } x \leq -2 \\ \log{(ax+7)} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \leq -2 \\ ax-2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $f(-2) = a$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{3}{x+1} = -3 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (-2x-7) = -3\end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to -2} f(x) = -3$$

La función es continua si $f(-2) = \lim\limits_{x\to -2} f(x) \to a = -3$.

b) $f(-2) = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 2^{x-1} = \dfrac{1}{8} \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (ax-2) = -2a-2\end{array}\right\}$$

$$\to \exists \lim_{x\to -2} f(x) \text{ si } \frac{1}{8} = -2a - 2 \to a = -\frac{17}{16}$$

c) $f(-2)=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} tg\dfrac{-\pi}{2x}=1\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} \log(ax+7)=\log(-2a+7)\end{array}\right\}$$

$$\to \exists \lim_{x\to -2} f(x) \text{ si } 1=\log(-2a+7)\to a=-\frac{3}{2}$$

Cuestión 16:

Razona si la siguiente función es continua en $x=3$ y en $x=0$.

$$y=\begin{cases}2^x-1 & \text{si } x\geq 3\\ \dfrac{12}{x}+3 & \text{si } x<3\end{cases}$$

$f(3)=7$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{12}{x}+3=7\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} (2^x-1)=7\end{array}\right\}\to \exists \lim_{x\to 3} f(x)$$

Como $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, la función es continua en $x=3$.

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{12}{x}+3\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{12}{x}+3\right)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 0} f(x), \text{ y la función no es continua en } x=0.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Cuestión 17:

Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$g(t)=\begin{cases}\log(t+7) & \text{si } t<3\\ 2 & \text{si } t=3\\ \dfrac{4}{7-t} & \text{si } t>3\end{cases}$$

Si presenta puntos de discontinuidad, estudia el límite cuando t tiende a ellos y decide qué tipos de discontinuidades son.

Si $t < 3$: $g(x) = \log(t + 7) \rightarrow \text{Dom } f = (-7, 3) \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $t = 3$: $g(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t \to 3^-} g(t) = \lim\limits_{t \to 3^-} \log(t + 7) = 1 \\ \lim\limits_{t \to 3^+} g(t) = \lim\limits_{t \to 3^+} \dfrac{4}{7 - t} = 1\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{t \to 3} g(t) = 1$$

Como $g(3) = \lim\limits_{t \to 3} g(t)$, la función es continua en $t = 3$.

Si $t > 3$: $g(t) = \dfrac{4}{7 - t} \rightarrow \text{Dom } f = (3, +\infty) - \{7\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t \to 7^-} g(t) = \lim\limits_{t \to 7^-} \dfrac{4}{7 - t} = +\infty \\ \lim\limits_{t \to 7^+} g(t) = \lim\limits_{t \to 7^+} \dfrac{4}{7 - t} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{t \to 7} g(t) \text{ y la función no es continua en } t = 7.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función es continua en $(-7, 7) \cup (7, +\infty)$.

Cuestión 18:

Estudia la continuidad de las funciones.

a) $y = [x]$ **(Parte entera de x)**

b) $y = \dfrac{x}{|x|}$

c) $y = |x^2 - 1|$

d) $y = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$

a) La función es continua salvo en los números enteros.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = a - 1 \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to a} f(x).$$

Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to 0} f(x), \text{ y la función no es continua en } x = 0.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Si $x = -1$: $f(-1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-x^2 + 1) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$$

Como $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x)$, la función es continua en $x = -1$.

Si $x = 1$: $f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2 + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ \dfrac{1}{-x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$

No existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función no es continua en } x = -1.$$

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función no es continua en } x = -1.$$

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.