

EJERCICIOS RESUELTOS HOJA 2

UNIDAD 9: GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

Cuestión 1:

Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ y $R(10, 25)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{PQ} = (-3, -14) \\ \vec{QR} = (6, 28) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \rightarrow A, B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

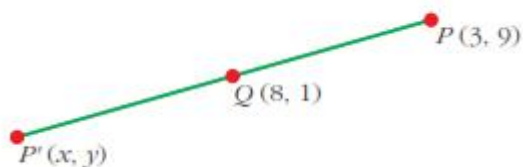
Cuestión 2:

Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, -1)$:

- Halla el punto medio de PQ .
- Halla el simétrico de P respecto de Q .
- Halla el simétrico de Q respecto de P .
- Obtén un punto A de PQ tal que $\overline{PA}/\overline{AQ} = 2/3$.
- Obtén un punto B de PQ tal que $\overline{PB}/\overline{PQ} = 1/5$.

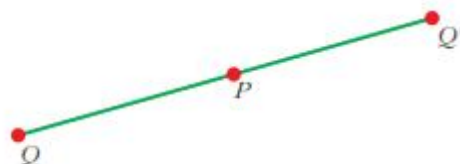
$$a) M\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \frac{3+x}{2} = 8 \rightarrow x = 13 \\ \frac{9+y}{2} = -1 \rightarrow y = -11 \end{array} \right\} \rightarrow P'(13, -11)$$



c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de Q respecto de P .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Así: } \frac{x'+8}{2} = 3 \rightarrow x' = -2 \\ \frac{y'+(-1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19 \end{array} \right\} Q'(-2, 19)$$



d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$$\vec{PA} = \frac{2}{3} \vec{AQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{2}{3} (8-x, -1-y)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-3 = \frac{2}{3}(8-x) \rightarrow x = 5 \\ y-9 = \frac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y = 5 \end{array} \right\} A(5, 5)$$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$$\vec{PB} = \frac{1}{5} \vec{PQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{1}{5} (5, -10) = (1, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ y-9 = -2 \rightarrow y = 7 \end{array} \right\} B(4, 7)$$

Cuestión 3:

Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) Que pasa por $A(-3, 7)$ y tiene una dirección paralela al vector $\vec{d}(4, -7)$.

b) Que pasa por $M(5, 2)$ y es paralela a $\vec{d}'(2, 2)$.

En ambos casos, dando valores al parámetro, obtén otros cinco puntos de la recta.

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{OX} &= \vec{OA} + t\vec{d} \rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(d_1, d_2) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 7t \end{cases} \end{aligned}$$

t	-2	-1	0	1	2	3
(x, y)	(-11, 21)	(-7, 14)	(-3, 7)	(1, 0)	(5, -7)	(9, -14)

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{OX} &= \vec{OM} + t\vec{d}' \rightarrow (x, y) = (m_1, m_2) + t(d'_1, d'_2) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x = m_1 + td'_1 \\ y = m_2 + td'_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \end{aligned}$$

t	-2	-1	0	1	2	3
(x, y)	(1, -2)	(3, 0)	(5, 2)	(7, 4)	(9, 6)	(11, 8)

Cuestión 4:

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por:

a) $P(5, -2)$ y $Q(0, 4)$

b) $M(3, 7)$ y $N(3, 0)$

c) $A(0, 0)$ y $B(7, 0)$

d) $R(1, 1)$ y $S(3, 3)$

$$\text{a) El vector dirección es: } \vec{PQ} = (-5, 6) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$$

$$\text{b) } \vec{d} = \vec{MN} = (0, -7) \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 - 7t \end{cases}$$

$$\text{c) } \vec{d} = \vec{AB} = (7, 0) \rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \vec{d} = \vec{RS} = (2, 2) \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

Cuestión 5:

• Halla k para que $S(-5, k)$ pertenezca a r : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

$$\begin{cases} -5 = 1 + 3t \rightarrow t = -6/3 = -2 \\ k = 2 - 4t \end{cases} \rightarrow k = 2 - 4(-2) = 10$$

Cuestión 6:

En cada caso, calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(2, -5)$ y $B(1, -3)$ b) $A(3, -3)$ y $B(-3, -3)$ c) $A(1, 4)$ y $B(1, -3)$ d) $A(-2, -4)$ y $B(3, -2)$

a) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$ y la recta pasa por $A(2, -5)$.

$$\text{Por tanto: } \frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x-4 = -y-5 \Rightarrow AB \equiv 2x+y+1=0$$

b) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (-6, 0)$ y la recta pasa por $A(3, -3)$.

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} x-3 = -6\lambda \\ y+3 = 0 \end{cases} \Rightarrow AB \equiv y = -3$$

c) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (0, -7)$ y la recta pasa por $A(1, 4)$.

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-4 = -7\lambda \end{cases} \Rightarrow AB \equiv x = 1$$

d) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ y la recta pasa por $A(-2, -4)$.

$$\text{Por tanto: } \frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x+4 = 5y+20 \Rightarrow AB \equiv 2x-5y-16=0$$

Cuestión 7:

Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices: $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ y $C(0, -3)$.

Las medianas son las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

En primer lugar se calculan los puntos medios de los lados:

Lado AB : $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; lado BC : $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; lado CA : $N(1, 0)$

La mediana correspondiente al lado AB pasa por C y M , y su vector director es: $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \parallel \vec{u} = (1, 9)$.

Luego la ecuación de la recta es $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{9} \Rightarrow 9x = y+3 \Rightarrow CM \equiv 9x - y - 3 = 0$.

La mediana correspondiente al lado BC pasa por A y P , y su vector director es: $\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right) \parallel (5, 9)$.

Luego la ecuación de la recta es $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{9} \Rightarrow 9x-18 = 5y-15 \Rightarrow AP \equiv 9x-5y-3=0$.

La mediana correspondiente al lado CA pasa por B y N , y su vector director es: $\overrightarrow{NB} = (2, 0)$.

Luego la ecuación de la recta es $BN \equiv y = 0$.

Cuestión 8:

Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes que pasan por el punto $A(-3, 5)$.

La recta paralela al eje OX que pasa por A es $y = 5$, y la recta paralela al eje OY que pasa por A es $x = -3$.

Cuestión 9:

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene por ecuación:

$$5x - 3y + 8 = 0$$

$$\text{Sea } x = t \rightarrow 5t - 3y + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8/3 + (5/3)t \end{cases}$$

NOTA - 2º MÉTODO

El vector $(5, -3)$ es perpendicular a r . Por tanto, el vector $(3, 5)$ es paralelo a r . Podemos tomarlo como vector dirección:

$$\vec{d} = (3, 5)$$

Si $x = 0 \rightarrow y = \frac{8}{3}$. Luego $\left(0, \frac{8}{3}\right) \in r$

Así, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 8/3 + 5t \end{cases}$$

(equivalente a la obtenida por el otro método).

Cuestión 10:

Halla la ecuación implícita de la recta: $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, y las sumamos:

$$\begin{array}{r} 2x = 10 - 6t \\ 3y = -3 + 6t \\ \hline 2x + 3y = 7 \rightarrow r: 2x + 3y - 7 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{NOTA - 2º MÉTODO: } x = 5 - 3t \rightarrow t = \frac{x-5}{-3} \\ y = -1 + 2t \rightarrow t = \frac{y+1}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} \\ 2x - 10 = -3y - 3 \\ r: 2x + 3y - 7 = 0 \end{array} \right.$$

Cuestión 11:

Escribe la ecuación de la recta de pendiente 3 y cuya ordenada en el origen es -5.

$$\begin{array}{l} m = 3 \\ P(0, -5) \in r \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow r: y = -5 + 3(x - 0) \rightarrow \\ \rightarrow r: y = 3x - 5 \rightarrow \text{ECUACIÓN EXPLÍCITA} \\ \rightarrow r: 3x - y - 5 = 0 \rightarrow \text{ECUACIÓN IMPLÍCITA} \end{array} \right.$$

Cuestión 12:

Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:

- a) (-7, 11), (1, 7) b) (3, -2), (1, 4)
c) (6, 1), (11, 1) d) (-2, 5), (-2, 8)

$$\begin{array}{l} \text{a) } m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{7 - 11}{1 - (-7)} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y - 7 = \frac{-1}{2}(x - 1) \\ \text{Tomando el punto (1, 7)} \quad x + 2y - 15 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } m = \frac{4 - (-2)}{1 - 3} = \frac{6}{-2} = -3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y - 4 = -3(x - 1) \\ \text{Tomando el punto (1, 4)} \quad 3x + y - 7 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } m = \frac{1 - 1}{11 - 6} = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \\ \text{Tomando el punto (6, 1)} \end{array} \right.$$

$$\text{d) } m = \frac{8 - 5}{-2 - 2} \text{ ¡Imposible! Entonces, no tiene pendiente.}$$

No se puede poner de forma explícita. Es la recta $x = -2$, paralela al eje Y .

Cuestión 13:

Halla dos puntos de la recta $y = -3x + 4$. Calcula a partir de ellos su pendiente, y comprueba que es la que corresponde a esa ecuación.

Si $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow A(0, 4) \in r$

Si $x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow B(1, 1) \in r$

$$m = \frac{1 - 4}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3$$

Efectivamente, es la de la recta $y = -3x + 4$.

Cuestión 14:

Halla un vector director y otro normal de la recta que pasa por el punto $A(-2, \frac{1}{3})$ y por el origen de coordenadas.

Vector director: $\overrightarrow{OA} = (-2, \frac{1}{3}) \parallel \vec{u} = (-6, 1)$

Vector normal: $(1, 6)$

Cuestión 15:

Una recta tiene como vector normal $\vec{n} = (2, -3)$ y pasa por el punto $A(-1, 2)$.

Escribe su ecuación normal, su ecuación normal canónica y su ecuación general.

Ecuación general:

La ecuación general es de la forma $2x - 3y + k = 0$. Como la recta pasa por A, ha de ser $-2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es: $2x - 3y + 8 = 0$.

Ecuación normal:

Si $X(x, y)$ es un punto de la recta, se verifica que $\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x + 1, y - 2) \cdot (2, -3) = 0 \Rightarrow 2(x + 1) - 3(y - 2) = 0$

Ecuación normal canónica:

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y + \frac{8}{\sqrt{13}} = 0$$

Cuestión 16:

Halla la ecuación de la recta perpendicular al segmento de extremos $A(0, -2)$ y $B(1, 4)$ y que pasa por el punto $C(3, 0)$.

$\overrightarrow{AB} = (1, 6)$ es un vector normal a la recta. Por tanto, la ecuación de la recta es de la forma $x + 6y + k = 0$. Como pasa por el punto C, ha de ser $3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$. Por tanto, la ecuación pedida es $x + 6y - 3 = 0$.

Cuestión 17:

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y tiene de pendiente $m = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la recta es de la forma $y = \frac{1}{2}x + n$. Como pasa por A, ha de ser $4 = \frac{1}{2}(-2) + n \Rightarrow n = 5$.

Por tanto, la ecuación pedida es $y = \frac{1}{2}x + 5$, o bien en su forma general: $x - 2y + 10 = 0$.

Cuestión 18:

Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $2x + 5y - 5 = 0$ y $3x - 5y + 5 = 0$

b) $3x + 5y - 5 = 0$ y $9x + 15y + 5 = 0$

a) $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow$ son rectas secantes. Se cortan en: $\begin{cases} 3x + 5y - 5 = 0 \\ 3x - 5y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 10y - 10 = 0 \Rightarrow y = 1, x = 0 \Rightarrow P(0, 1)$.

b) $\frac{3}{9} = \frac{5}{15} \neq \frac{-5}{5} \Rightarrow$ son rectas paralelas.

Cuestión 19:

Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $s: x - y + 5 = 0$ y $t: x + y + 1 = 0$.

Se calcula el punto de intersección de s y t : $\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(-3, 2)$

Todas las paralelas a r son de la forma $2x + y + k = 0$. Como tiene que pasar por $(-3, 2)$, se tiene: $-6 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

La ecuación de la recta buscada es $2x + y + 4 = 0$

Cuestión 20:

Halla el ángulo que forman las siguientes rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

Los vectores directores de r_1 y r_2 son, respectivamente, $\vec{d}_1(-2, 1)$ y $\vec{d}_2(-4, 3)$.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1| |\vec{d}_2|} = \frac{8 + 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{25} \approx 0,984 \rightarrow \alpha = 10^\circ 18' 17,4''$$

Cuestión 21:

Averigua la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ 3x - 9y - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + y + 3 = 0 \\ x - 2y + 16 = 0 \end{cases}$$

Se puede resolver el sistema o bien observar los coeficientes y el término independiente de ambas ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{A}{A'} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9} = \frac{B}{B'} = \frac{4}{-12} = \frac{C}{C'}$$

Es decir: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \rightarrow$ Son la misma recta.

$$\text{b) } \frac{5}{1} \neq \frac{1}{-2} \rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \rightarrow \text{Las rectas se cortan en un punto.}$$

Para calcular el punto de corte, bastará con resolver el sistema.

Despejando en la primera ecuación: $y = -3 - 5x$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - 2(-3 - 5x) + 16 = 0 \rightarrow x + 6 + 10x + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

Con lo que:

$$y = -3 - 5(-2) = 7 \rightarrow (x, y) = (-2, 7) \rightarrow \text{Punto de corte}$$

Cuestión 22:

¿Cuál es la posición relativa de estos dos pares de rectas?

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ 6x + 10y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$a) \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow \text{Son paralelas.}$$

$$b) \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + x - 4 = 0 \\ x = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 4 \\ y = 4/3 \end{cases} \rightarrow x = 4/3$$

Son dos rectas que se cortan en el punto $(4/3, 4/3)$

Cuestión 23:

Halla la distancia de $Q(-3, 4)$ a las siguientes rectas:

$$a) 2x + 3y = 4 \quad b) \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} \quad c) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases} \quad d) \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$a) 2x + 3y - 4 = 0$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-6 + 12 - 4|}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \approx 0,55$$

$$b) \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} \rightarrow 5x - 5 = 2y - 8 \rightarrow 5x - 2y + 3 = 0$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|5 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|-15 - 8 + 3|}{\sqrt{29}} = \frac{20\sqrt{29}}{29} \approx 3,71$$

$$c) \begin{cases} t = \frac{x-1}{-2} \\ t = \frac{y-3}{-6} \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-6} \rightarrow -6x + 6 = -2y + 6 \rightarrow 6x - 2y = 0 \rightarrow 3x - y = 0$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|3 \cdot (-3) - 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|-9 - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10} \approx 4,11$$

$$d) 3x + 2y = 6 \rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|-9 + 8 - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} \approx 1,94$$

Cuestión 24:

Calcula el ángulo que forman las rectas:

$$a) r: 3x - 4y = 0 \text{ y } s: 2x + 2y + 3 = 0$$

$$b) r: y = x - 5 \text{ y } s: y = 2x + 2$$

a) Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (3, -4)$ y $\vec{n}_2 = (2, 2)$. Luego:

$$\cos(\widehat{r, s}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|6 - 8|}{\sqrt{9 + 16} \sqrt{4 + 4}} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = 0,141 \Rightarrow \alpha = 81^\circ 52'$$

b) Las pendientes son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$.

$$\text{Luego } \tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1 - 2}{1 + 2} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18^\circ 26'$$

Cuestión 25:

Calcula el simétrico de $P(-2, 3)$ respecto del punto $M(1, -4)$.

Sea $P'(a, b)$ el punto buscado. M es el punto medio del segmento PP' . Por tanto:

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow \frac{-2 + a}{2} = 1 \Rightarrow a = 4 \quad \frac{3 + b}{2} = -4 \Rightarrow b = -11 \Rightarrow P'(4, -11)$$

Cuestión 26:

Calcula el simétrico de $P(5, -1)$ respecto de la recta $r: x - y + 3 = 0$.

En primer lugar se calcula la recta perpendicular a r que pasa por P . Dicha recta tiene como vector director el vector normal de r , $n = (1, -1)$, luego:

$$s \equiv \frac{x - 5}{1} = \frac{y + 1}{-1} \Rightarrow -x + 5 = y + 1 \Rightarrow s \equiv x + y - 4 = 0$$

El punto de intersección de ambas rectas es:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{7}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Sea $P'(a, b)$ el punto buscado. M es el punto medio del segmento PP' . Por tanto:

$$\frac{5 + a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -4 \quad \frac{-1 + b}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow b = 8 \Rightarrow P'(-4, 8)$$

Cuestión 27:

Calcula la recta simétrica del eje de ordenadas respecto de $y = x + 1$.

Primero calculamos el punto Q de intersección de ambas rectas ya que es el único invariante por la simetría:
 $r \equiv y = x + 1$

$$Q = r \cap OY \equiv \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0, 1)$$

Para calcular la recta simétrica indicada basta con determinar el simétrico P' de otro punto cualquiera, P , del eje de ordenadas, ya que la recta buscada será determinada por los puntos Q y P' .

El punto $P(0, 3)$ pertenece al eje Y . El vector director de r es $(1, 1)$, luego el de la recta perpendicular es $(1, -1)$.

La recta perpendicular a r por el punto P es $y = -x + 3$, que corta a r en $M(1, 2)$. Para hallar el punto P' , simétrico de P respecto de r , se utiliza que M es el punto medio del segmento PP' , con lo que debe ser $P'(2, 1)$. Por lo tanto, la recta simétrica del eje Y respecto de r es la que pasa por Q y P' , cuya ecuación es $y = 1$.

Cuestión 28:

Halla el extremo B del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(2, 1)$, y la mediatriz del segmento es $r: x + 2y - 9 = 0$.

Sea $B(a, b)$. Como la mediatriz es perpendicular al segmento: $\overline{AB} = (a - 2, b - 1) = k(1, 2)$

El punto medio de AB pertenece a r , por lo que $\frac{2 + (2 + k)}{2} + 2 \frac{1 + (1 + 2k)}{2} - 9 = 0 \Rightarrow k = 2$

Por tanto, el extremo es $B(4, 5)$.

Cuestión 29:

Escribe las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:

a) Su vector de posición es $\vec{a}(-3, 1)$ y su vector de dirección $\vec{v}(2, 0)$.

b) Pasa por $A(5, -2)$ y es paralela a: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

c) Pasa por $A(1, 3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$.

d) Es perpendicular al segmento PQ en su punto medio, siendo $P(0, 4)$ y $Q(-6, 0)$, en su punto medio.

a) La ecuación vectorial será:

$$\vec{OX} = \vec{a} + t\vec{v} \rightarrow (x, y) = (-3, 1) + t(2, 0) \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$$

b) El vector dirección de la recta buscada debe ser el mismo (o proporcional) al de

la recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ (pues debe ser paralela a ella).

Luego: $\vec{d}(-1, 2)$

Como debe pasar por $A(5, -2) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) La pendiente de la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ es:

$$m_r = \frac{2}{3} \rightarrow m_s = \frac{-3}{2} \text{ (pues } m_r \cdot m_s = -1 \text{ por ser } r \perp s)$$

Un vector director puede ser $\vec{s} = (2, -3)$.

Además, $A(1, 3) \in s$.

Por tanto, $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

d) El punto medio de PQ es $m\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$$\vec{PQ} = (-6, -4)$$

$$\rightarrow \begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}(4, -6) \text{ es un vector director de } s, \text{ pues } \vec{d} \perp \vec{PQ} \end{cases}$$

Luego, $s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

Cuestión 30:

Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ a las siguientes rectas:

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$ b) $y = \frac{9}{4}$ c) $2x + 5 = 0$

a) Veamos primero la ecuación implícita de la recta:

$$\begin{cases} t = x/2 \\ t = -y \end{cases} \rightarrow \frac{x}{2} = -y \rightarrow x + 2y = 0$$

Entonces:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

b) $y = \frac{9}{4} \rightarrow y - \frac{9}{4} = 0$

Por tanto:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|1(-3) - 9/4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|-3 - 9/4|}{\sqrt{1}} = \frac{21}{4}$$

c) $\text{dist}(P, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 0}} = \frac{9}{2}$

Cuestión 31:

Calcula la distancia del origen de coordenadas a las siguientes rectas:

a) $3x - 4y + 12 = 0$

b) $2y - 9 = 0$

c) $x = 3$

d) $3x - 2y = 0$

$$a) \operatorname{dist}(0, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{12}{5}$$

$$b) \operatorname{dist}(0, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{9}{2}$$

$$c) \operatorname{dist}(0, r) = \frac{|0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$d) \operatorname{dist}(0, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0$$

(es decir, la recta $3x - 2y = 0$ pasa por el origen).

Cuestión 32:

Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

$$\bullet \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow -2y + 5 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow A\left(0, \frac{5}{2}\right) \text{ es el punto de corte con el eje } Y$$

$$\bullet \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow$$

$$\rightarrow B(-5, 0) \text{ es el punto de corte con el eje } X$$

$$\bullet \text{ Luego } \overline{AB} = \operatorname{dist}(A, B) = \sqrt{(-5 - 0)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2} \sqrt{5}$$

Cuestión 33:

Halla la distancia entre las rectas $r: x - 2y + 8 = 0$ y $r': -2x + 4y - 7 = 0$.

• Comprueba que son paralelas; toma un punto cualquiera de r y halla su distancia a r' .

Sus pendientes son $m_r = \frac{1}{2} = m_{r'} \rightarrow$ Son paralelas.

Entonces, la distancia entre r y r' será:

$$\operatorname{dist}(P, r') \text{ donde } P \in r$$

Sea $x = 0$.

Sustituyendo en $r \rightarrow y = \frac{-8}{-2} = 4 \rightarrow P(0, 4) \in r$

Así:

$$\text{dist}(r, r') = \text{dist}(P, r') = \frac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{|16 - 7|}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

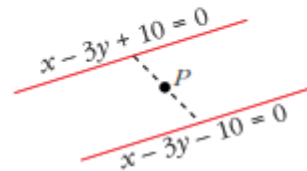
Cuestión 34:

Determina c para que la distancia de la recta $x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Hay dos soluciones).

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$\text{Hay dos soluciones: } \begin{cases} \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \rightarrow c_1 = 10 \\ \frac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \rightarrow c_2 = -10 \end{cases}$$

Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas:



Cuestión 35:

Calcula el valor de a para que la distancia del punto $P(1, 2)$ a la recta $ax + 2y - 2 = 0$ sea igual a $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, r) = \sqrt{2} &\rightarrow \frac{|a \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \rightarrow a + 2 = \sqrt{2(a^2 + 4)} \\ \frac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = -\sqrt{2} \rightarrow a + 2 = -\sqrt{2(a^2 + 4)} \end{cases} \end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado obtenemos la misma ecuación en ambos casos.

$$\rightarrow (a + 2)^2 = 2(a^2 + 4) \rightarrow a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Cuestión 36:

Calcula un vector de dirección y otro normal a cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por los puntos $A(2, -5)$ y $B(-5, -1)$.

b) Pasa por $O(0, 0)$ y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con $A(2, 6)$ y $B(-2, -4)$.

c) Mediatriz del segmento de extremos $P(3, 5)$ y $Q(5, 2)$.

a) Vector de dirección: $\overrightarrow{AB} = (-5 - 2, -1 + 5) = (-7, 4)$; vector normal: $(4, 7)$

b) El punto medio es $M\left(\frac{2 - 2}{2}, \frac{6 - 4}{2}\right) = (0, 1)$. Por tanto, un vector de dirección es $(0, 1)$, y uno normal, $(-1, 0)$.

c) Un vector normal a la mediatriz es $\overrightarrow{PQ} = (5 - 3, 2 - 5) = (2, -3)$. Un vector director es $(3, 2)$.

Cuestión 37:

Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) $r \equiv y = -2x + 3$ c) $t \equiv \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 1 = 0$

b) $s \equiv 4x + 3y - 6 = 0$ d) La recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = -2$.

a) La recta pasa por el punto $P(0, 3)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (2, 1)$, un vector director es $\vec{u} = (1, -2)$.

Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$

b) La recta pasa por el punto $P(0, 2)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (4, 3)$, un vector director es $\vec{u} = (-3, 4)$.

Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$

c) La recta pasa por el punto $P(2, 0)$. Como un vector normal es $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \parallel (2, 3)$, un vector director es

$\vec{u} = (-3, 2)$. Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) La recta es $y = 1 - 2x$. Pasa por el punto $(0, 0)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (2, 1)$, un vector director es

$\vec{u} = (1, -2)$. Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

Cuestión 38:

Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

a) $r: y = -2x + 3$

b) $r: 2x - 3y + 5 = 0$

c) $r: -\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 5 = 0$

e) Recta que pasa por los puntos $P(1, a)$ y $Q(1, 3a)$.

f) Recta cuyo vector director es $\vec{u} = (-3, 5)$.

g) Recta cuyo vector normal es $\vec{n} = (2, -7)$.

d) Recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$. h) $r: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

a) La recta está en forma explícita, luego $m = -2$.

b) $2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{2}x + 25 \Rightarrow m = \frac{15}{2}$

d) La dirección es la del vector $\overrightarrow{PQ} = (2, 1) \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

e) $m = \frac{3a - a}{1 - 1} = \frac{2a}{0}$. Es una recta vertical (si $a = 0$ no es una recta, al ser P y Q el mismo punto).

f) $m = -\frac{5}{3}$

g) Su dirección es la del vector $\vec{u} = (7, 2) \Rightarrow m = \frac{2}{7}$

h) Su dirección es la del vector $\vec{u} = (5, 2) \Rightarrow m = \frac{2}{5}$

Cuestión 39:

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 6)$ y es paralela a $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in R$

La ecuación tiene el mismo vector de dirección que la recta dada y pasa por P , luego:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 6 - t \end{cases} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 6}{-1} \Rightarrow -x + 2 = 2y - 12 \Rightarrow x + 2y - 14 = 0$$

Cuestión 40:

Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

a) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 3 + \frac{t}{2} \\ y = 1 - \frac{t}{2} \end{cases}$ d) $r: x + y = 7$ $s: -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2} = 0$

b) $r: 3x - 2y = 7$; $s: 2x - 3y = 8$

e) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$ $s: 4x + y - 8 = 0$

c) $r: 2x - y - 5 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 5 = 0$

f) $r: y = -2x + 3$ $s: y = \frac{x}{2}$

a) Los vectores de dirección de las rectas son $\vec{u}_r = (1, -1) \parallel \vec{u}_s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Como el punto $P(3, 1)$ de s no pertenece a r , ya que $\begin{cases} 3 = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda = 2 \\ 1 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$, las rectas son paralelas.

b) $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow$ Las rectas son secantes. Se cortan en $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ -6x + 9y = -24 \end{cases} \Rightarrow y = -2x + 1 \Rightarrow P(1, -2).$

c) s , se puede escribir como: $-2x + y - 15 = 0$ y al ser $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-5}{-15} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

d) s , se escribe como $x + y - 7 = 0$, que es la misma expresión de r , por lo que las rectas son coincidentes.

e) $4(1 + \lambda) - 2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$. Las rectas son secantes en $\begin{cases} x = 1 + 3 = 4 \\ y = -2 - 6 = -8 \end{cases} \Rightarrow P(4, -8).$

f) Las rectas son secantes. Se cortan en el punto $\frac{x}{2} = -2x + 3 \Rightarrow x = -4x + 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} y = \frac{3}{5} \Rightarrow P\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right).$

Cuestión 41:

Calcula el punto de intersección de los siguientes pares de rectas secantes:

a) $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 - 4\mu \\ y = 2 + 2\mu \end{cases}$ c) $r: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $s: -\frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0$

b) $r: 2x - 5y = -\frac{23}{2}$ $s: 3x - 4y = -12$ d) $s: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases}$ $s: 2x - y - 6 = 0$

Para calcular el punto de intersección basta resolver los sistemas de ecuaciones dados por las rectas.

a) $r = \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} x = 1 - 4\mu \\ y = 2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - 4\mu \\ 1 + \lambda = 2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ 3\lambda - 6\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ 3\lambda - 6\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow -2\mu = 2 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(5, 0).$

b) $\begin{cases} r \equiv 2x - 5y = -\frac{23}{2} \\ s \equiv 3x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 15y = -\frac{69}{2} \\ -6x + 8y = 24 \end{cases} \Rightarrow -7y = -\frac{21}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x = -2 \Rightarrow P\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

c) $\begin{cases} r \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ s \equiv \frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = 2 \\ -x + \frac{16y}{3} = -12 \end{cases} \Rightarrow 6y = -10 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x = \frac{28}{9} \Rightarrow P\left(\frac{28}{9}, -\frac{5}{3}\right)$

d) $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv 2x - y - 6 = 0 \Rightarrow 2(2 - 3\lambda) + 2 - 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow -8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P(2, -2)$

Cuestión 42:

Calcula la ecuación de las siguientes rectas:

- a) Paralela a $2x + 5y - 5 = 0$ y que pasa por el punto $A(-2, 6)$.
 - b) Paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.
 - c) Paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.
 - d) Paralela a $r: 2x - y + 12 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.
 - e) Paralela a $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, 4)$.
 - f) Paralela a $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, -2)$.
 - g) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que tiene ordenada en el origen igual a 5.
- a) La recta es de la forma $2x + 5y + k = 0$. Como pasa por A , ha de ser $-4 + 30 + k = 0 \Rightarrow k = -26$. Por tanto, la ecuación buscada es $2x + 5y - 26 = 0$.
- b) La recta es $y = 4$.
- c) La recta es $x = -1$.
- d) La recta es de la forma $2x - y + k = 0$. Como pasa por $(0, 0)$, $k = 0$. Luego la ecuación es $2x - y = 0$.
- e) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego:
- $$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow x+2 = 2y-8 \Rightarrow x-2y+10=0$$
- f) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$
- g) La pendiente de la recta es $m = 1$, y la ordenada en el origen, $n = 5$. Luego la recta es $y = x + 5$.

Cuestión 43:

Calcula la ecuación de las siguientes rectas:

- a) Perpendicular a $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(2, -1)$.
- b) Perpendicular al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-4, 8)$.
- c) Perpendicular al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 3)$.
- d) Perpendicular a $r: 3x - 3y + 1 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.
- e) Perpendicular a $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-1, 0)$.
- f) Perpendicular al segmento $\overline{AB}$ con $A(-1, -3)$ y $B(2, -5)$ y que pasa por $P(-3, 2)$.

- a) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, -2)$ y pasa por A , luego

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x+4 = y+1 \Rightarrow 2x+y-3=0$$

- b) El vector de dirección es $\vec{u} = (0, 1)$ y pasa por A , luego $\begin{cases} x = -4 \\ y = 8 + t \end{cases} \Rightarrow x = -4$

- c) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, 0)$ y pasa por A , luego $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3$

- d) El vector de dirección es $\vec{u} = (3, -3)$ y pasa por $(0, 0)$, luego

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{3} = \frac{y}{-3} \Rightarrow -3x - 3y = 0 \Rightarrow 3x + 3y = 0$$

e) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, -2)$ y pasa por P , luego

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$$

f) $\overline{AB} = (3, -2)$; por tanto, el vector de dirección de la recta es $\vec{u} = (2, 3)$ y pasa por P ,

$$\text{luego } \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3x + 9 = 2y - 4 \Rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$$

Cuestión 44:

En cada caso, calcula el valor del parámetro k para que las rectas tengan la posición relativa indicada.

a) $r: x - ky + 1 = 0$; $s: kx - 4y - 3 = 0$, paralelas.

b) $r: kx - 2y - 4k = 0$; $s: x - 3y - 4 = 0$, coincidentes.

c) $r: 2kx + 5y - 1 = 0$; $s: 3x - ky + 2 = 0$, paralelas.

a) Ha de verificarse que $\frac{1}{k} = \frac{-k}{-4} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

b) Ha de verificarse que $\frac{k}{1} = \frac{-2}{-3} = \frac{-4k}{-4} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

c) Ha de verificarse que $\frac{2k}{3} = \frac{-5}{k} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2k^2 = -15 \Rightarrow$ Imposible, luego no pueden ser paralelas.

Cuestión 45:

Halla la distancia del punto $A(2, -3)$ al punto de intersección de las rectas $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$, $s: 2x + y - 3 = 0$

El punto de intersección es $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 + y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow P(1, 1) \Rightarrow d(A, P) = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} u$

Cuestión 46:

Calcula las coordenadas de los vértices y el perímetro del triángulo determinado por las rectas:

$$r: x - 3y + 1 = 0$$

$$s: 3x - 2y - 4 = 0$$

$$t: 2x + y + 2 = 0$$

En primer lugar se calculan los vértices, que son los puntos de corte de las rectas.

$$\begin{cases} r: x - 3y + 1 = 0 \\ s: 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 9y - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y - 7 = 0 \Rightarrow y = 1 \quad x = 2 \Rightarrow A(2 \quad 1)$$

$$\begin{cases} r: x - 3y + 1 = 0 \\ t: 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y - 2 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad x = -1 \Rightarrow B(-1 \quad 0)$$

$$\begin{cases} s: 3x - 2y - 4 = 0 \\ t: 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 8 = 0 \\ -6x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow -7y - 14 = 0 \Rightarrow -7y - 14 = 0 \Rightarrow y = -2 \quad x = 0 \Rightarrow C(0 \quad -2)$$

A continuación se calculan las longitudes de los lados:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\overline{CB} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

El perímetro es: $P = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13} u$.

Cuestión 47:

Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del $\overline{AB}$ respecto de la simetría axial de eje r siendo: $A(1, 3)$, $B\left(3, \frac{5}{2}\right)$ y $r: x + y = 3$.

Sea $\overline{A'B'}$ el segmento simétrico de $\overline{AB}$. Por tratarse de una simetría axial, la recta que pasa por A y A' es perpendicular a r . Su ecuación general es: $AA' \equiv x - y + k = 0 \Rightarrow 1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

El punto de corte de dicha recta con r es:

$$M \equiv AA' \cap r \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

M es el punto medio de A y A' , luego:

$$A(1, 3), M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ y } A'(a, b) \Rightarrow \frac{1+a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 0; \frac{3+b}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow A'(0, 2)$$

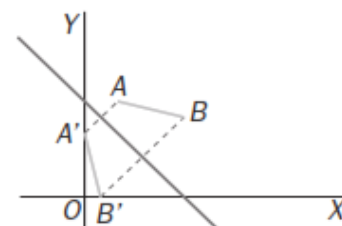
Siguiendo un proceso análogo para el punto B se tiene:

$$BB' \equiv x - y + k = 0 \Rightarrow 3 - \frac{5}{2} + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - y - \frac{1}{2} = 0;$$

$$N \equiv BB' \cap r \Rightarrow \begin{cases} x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{4}, y = \frac{5}{4} \Rightarrow N\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

N es el punto medio de B y B' , luego:

$$B\left(3, \frac{5}{2}\right), N\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) \text{ y } B'(a, b) \Rightarrow \frac{3+a}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; \frac{\frac{5}{2}+b}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow B'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$



Cuestión 48:

Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, -2)$:

a) Calcula las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

b) Calcula las coordenadas del punto que equidista de A , B y C .

En primer lugar se calculan las ecuaciones de las rectas correspondientes a los lados del triángulo:

$$\overline{AB} \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y-4}{-4} \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

$$\overline{AC} \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-6} \Rightarrow -3x + 3 = y - 4 \Rightarrow 3x + y - 7 = 0$$

$$\overline{BC} \equiv \frac{x+3}{6} = \frac{y}{-2} \Rightarrow -x - 3 = 3y \Rightarrow x + 3y + 3 = 0$$

a) La mediatriz es la perpendicular al lado que pasa por el punto medio, luego:

$$M_{\overline{AB}} \equiv x + y + k = 0 \text{ pasa por el punto } (-1, 2) \Rightarrow -1 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

$$M_{\overline{AC}} \equiv x - 3y + k = 0 \text{ pasa por el punto } (2, 1) \Rightarrow 2 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$$

$$M_{\overline{BC}} \equiv 3x + y + k = 0 \text{ pasa por el punto } (0, -1) \Rightarrow 1 + k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

b) Se trata de calcular el circuncentro (punto donde se cortan las tres mediatrices): $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Cuestión 49:

Halla el punto de la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ y que equidista de los puntos $A(2, 2)$ y $B(-2, 4)$.

El punto buscado será la intersección de la recta r con la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

$$\text{La mediatriz del segmento } \overline{AB} \text{ es: } \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow y - 3 = 2x \Rightarrow 2x - y + 3 = 0.$$

$$\text{El punto de intersección es: } \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 1)$$

Cuestión 50:

Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de las rectas:

$$r: x + 3y = 14$$

$$s: 3x - 5y = -14$$

$$t: 2x - y = -7$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 3x - 5y = -14 \end{cases} \Rightarrow A(2, 4) \quad \begin{cases} x + 3y = 14 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow B(-1, 5) \quad \begin{cases} 3x - 5y = -14 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow C(-3, 1)$$

La longitud de la base es: $d(A, B) = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \, u$

La longitud de la altura es: $d(C, \overline{AB}) = \frac{|-3 + 3 - 14|}{\sqrt{10}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{5} \, u$

El área es: $S = \frac{\sqrt{10} \cdot \frac{14}{\sqrt{10}}}{2} = 7 \, u^2$

Cuestión 51:

Calcula el valor de k para que la recta $x + y = k$ forme con los ejes coordenados un triángulo de 5 unidades cuadradas de área.

La recta corta a los ejes coordenados en $(k, 0)$ y $(0, k)$. El área del triángulo será, por tanto, $\frac{k^2}{2}$.

$$\frac{k^2}{2} = 5 \Rightarrow k = \sqrt{10}.$$

Cuestión 52:

Halla las coordenadas de los puntos de la recta $r: x + 2y - 2 = 0$ y que distan 2 unidades de la recta $s: 4x - 3y + 13 = 0$.

Sea X un punto genérico de r . Sus coordenadas son:

$$r \equiv x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow X(2 - 2t, t)$$

$$d(X, s) = \frac{4 \cdot (2 - 2t) - 3t + 13}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Rightarrow \pm \frac{21 - 11t}{5} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 21 - 11t = 10 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P_1(0, 1) \\ 21 - 11t = -10 \Rightarrow t = \frac{31}{11} \Rightarrow P_2\left(-\frac{40}{11}, \frac{31}{11}\right) \end{cases}$$

Cuestión 53:

Calcula m y n en las rectas de ecuaciones:

$$r: mx - 2y + 5 = 0$$

$$s: nx + 6y - 8 = 0$$

sabiendo que son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(1, 4)$.

Las coordenadas de P deben verificar la ecuación de r . Así calculas m . Expresa la perpendicularidad con vectores o con pendientes y halla n .

$$\bullet P(1, 4) \in r \rightarrow m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \rightarrow m = 3$$

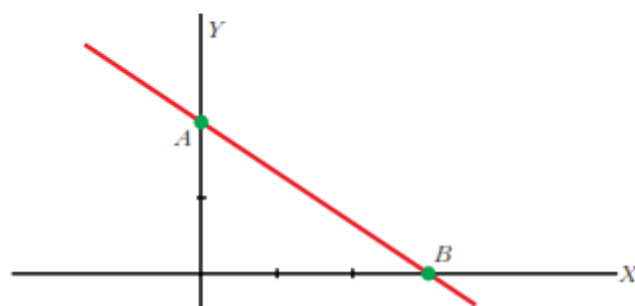
$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & \bullet (m, -2) \perp r \\ & (n, 6) \perp s \\ & \text{Como deben ser } r \perp s \end{aligned} \right\} \rightarrow (m, -2) \perp (n, 6) \rightarrow \\
 & \rightarrow (m, -2) \cdot (n, 6) = 0 \rightarrow m \cdot n + (-2) \cdot 6 = 0 \rightarrow \\
 & \rightarrow 3n - 12 = 0 \rightarrow n = 4
 \end{aligned}$$

Cuestión 54:

La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, un segmento AB .

Halla la ecuación de la mediatriz de AB .

➡ Después de hallar los puntos A y B , halla la pendiente de la mediatriz, inversa y opuesta a la de AB . Con el punto medio y la pendiente, puedes escribir la ecuación.



$$\bullet A = r \cap \text{eje } Y: \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow A(0, 2)$$

$$\bullet B = r \cap \text{eje } X: \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow B(3, 0)$$

$$\bullet \left. \begin{aligned} & \vec{AB} = (3, -2) \perp m_{AB} \text{ (mediatriz de } AB) \rightarrow \vec{m}_{AB} = (2, 3) \\ & m_{AB} \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1 \right) \text{ (punto medio de } AB) \in \text{mediatriz} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow y - 1 = \frac{3}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \rightarrow m_{AB}: 6x - 4y - 5 = 0$$

Cuestión 55:

Determina los puntos que dividen al segmento AB , $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, en tres partes iguales.

➡ Si P y Q son esos puntos, $\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB}$.

Escribe las coordenadas de $\vec{AP}$ y de $\vec{AB}$ y obtén P . Q es el punto medio de $\overline{PB}$



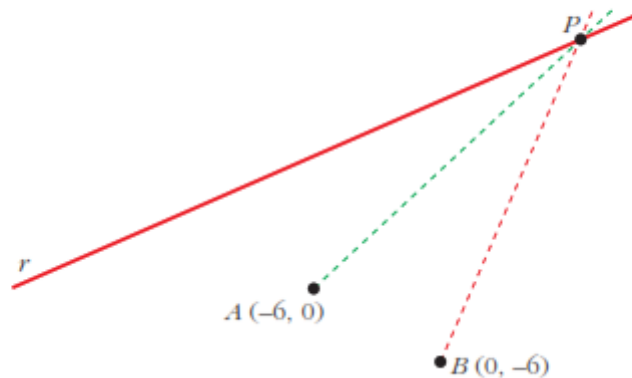
$$\bullet \vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB} \rightarrow (x+2, y-1) = \frac{1}{3}(7, 3) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+2 = \frac{7}{3} \rightarrow x = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} \\ y-1 = \frac{3}{3} \rightarrow y = 1+1 = 2 \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{1}{3}, 2\right)$$

$$\bullet Q \text{ es un punto medio de } PB \rightarrow Q\left(\frac{1/3+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \rightarrow Q\left(\frac{8}{3}, 3\right)$$

Cuestión 56:

Halla el punto de la recta $3x - 4y + 8 = 0$ que equidista de $A(-6, 0)$ y $B(0, -6)$.



$P(x, y)$ debe verificar dos condiciones:

$$1. P(x, y) \in r \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$$

$$2. dist(A, P) = dist(B, P) \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+6)^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x^2 + 12x + 36 + y^2 = x^2 + y^2 + 12y + 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x - 4x + 8 = 0 \rightarrow x = 8 = y \rightarrow P(8, 8)$$

Cuestión 57:

Halla los puntos de la recta $y = -x + 2$ que equidistan de las rectas $x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 2y + 1 = 0$.

Sean r_1 , r_2 y r_3 las tres rectas del ejercicio, respectivamente.

Buscamos los puntos $P(x, y)$ que cumplan:

$$\begin{cases} P \in r_1 \Rightarrow y = -x + 2 \\ dist(P, r_2) = dist(P, r_3) \end{cases} \rightarrow \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{20}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|x + 2(-x + 2) - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2(-x + 2) + 1|}{2\sqrt{5}} \rightarrow$$

$$\rightarrow |-x-1| = \frac{|6x-3|}{2} \rightarrow \begin{cases} -x-1 = \frac{6x-3}{2}, & \text{o bien} \\ -x-1 = \frac{-6x+3}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x-2 = 6x-3, & \text{o bien} \\ -2x-2 = -6x+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x=1 \\ 4x=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/8 \\ x_2 = 5/4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{8} + 2 = \frac{15}{8} \\ y_2 = -\frac{5}{4} + 2 = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 \left(\frac{1}{8}, \frac{15}{8} \right) \\ P_2 \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right) \end{cases}$$

Cuestión 58:

Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

- $\vec{PP'} \perp \vec{v}$ donde P' es el simétrico de P respecto a esa recta y $\vec{v}$ es el vector director de la misma.

$$\vec{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (x-1, y-1) \cdot (2, 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x-1) + (y-1) = 0 \rightarrow 2x + y - 3 = 0$$

- Además, el punto medio de PP' , m , debe pertenecer a la recta. Luego:

$$m \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2} \right) \in r \rightarrow \frac{x+1}{2} - 2 \frac{y+1}{2} - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x+1-2y-2-8=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x-2y-9=0$$

- Así, teniendo en cuenta las dos condiciones:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 9 + 2y \rightarrow$$

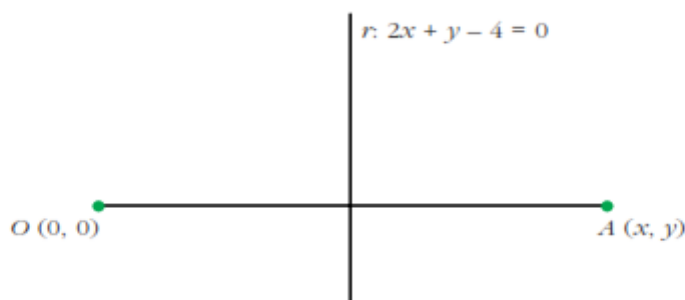
$$\rightarrow 2(9 + 2y) + y - 3 = 0 \rightarrow 18 + 4y + y - 3 = 0 \rightarrow y = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\rightarrow x = 9 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$$

Luego: $P' = (3, -3)$

Cuestión 59:

La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $(0, 0)$. Halla las coordenadas del otro extremo.



Un vector director de la recta es el $\vec{v} = (1, -2)$.

- Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \vec{OA} = \vec{v} \cdot \vec{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \rightarrow x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y$$

- Además, el punto medio de OA , M , pertenece a la recta:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r &\rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow 4y + y - 8 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow y = \frac{8}{5} \rightarrow x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Cuestión 60:

De todas las rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$, halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.

• La ecuación $y = 2 + m(x - 1)$ representa a todas esas rectas. Pásala a forma general y aplica la condición $d(O, r) = 1$.

- Esas rectas tienen por ecuación:

$$\begin{aligned} y = 2 + m(x - 1) &\rightarrow mx - y + (2 - m) = 0 \\ \bullet d(O, r) = 1 &\rightarrow \frac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow (2 - m)^2 = m^2 + 1 \rightarrow 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 - 4m = 1 \rightarrow m = \frac{3}{4}$$