UNIDAD 10: **LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS**

Contenido

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

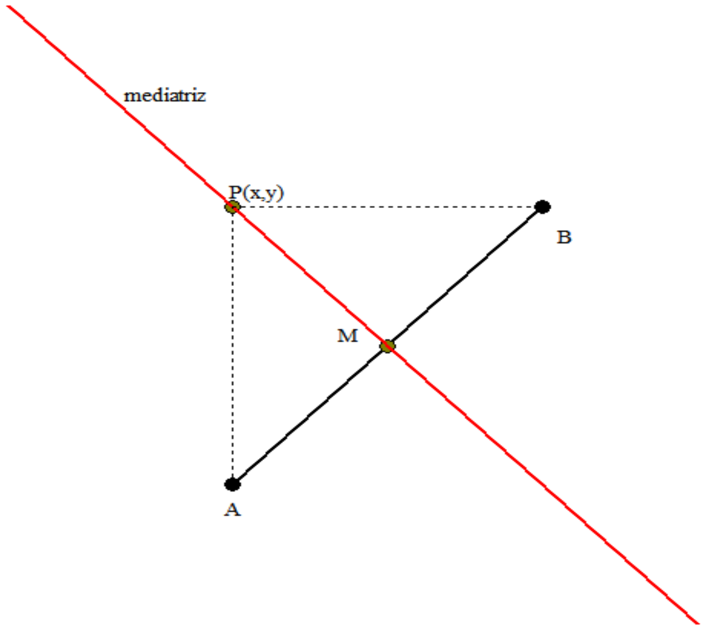
Definición: Se llama *lugar geométrico* a la figura que forman un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad

Ejemplos:

Mediatriz de un segmento: Dado un segmento de extremos A y B, el lugar geométrico de los puntos que equidistan (están a igual distancia) de los extremos A y B es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$

, y es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio del segmento.

Por tanto se tiene que cumplir que $d(A,P)=d(B,P)$



Veamos con un caso particular como calcular la ecuación general de la recta mediatriz de un segmento

Vamos a calcular la mediatriz del segmento de extremos $A(-1,1)\ y\ B(5,3)$

1ª Forma: Aplicando la definición de mediatriz como puntos que equidistan de los extremos $A\ y\ B$ del segmento

Tomamos un punto $P(x,y)$ que ha de cumplir que: $d(A,P)=d(B,P) \rightarrow \left|\vec{AP}\right|=\left|\vec{BP}\right| \rightarrow$

$|(x+1,y-1)|=|(x-5,y-3)| \rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \rightarrow$ Quitamos las raíces cuadradas y desarrollamos y nos queda: $x^2+2x+1+y^2-2y+1=x^2-10x+25+y^2-6y+9 \rightarrow$ Operamos y simplificamos:

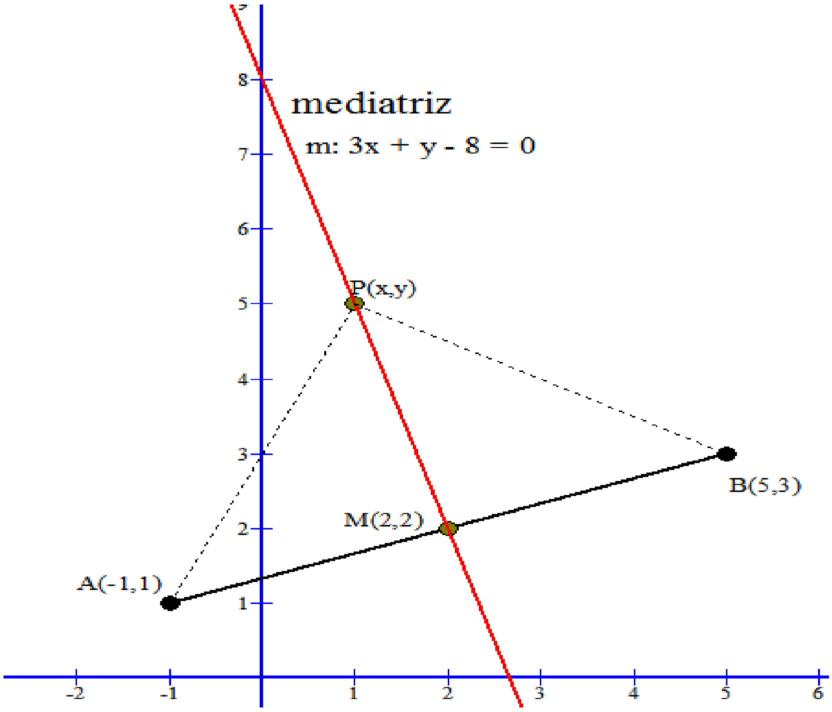
$2x-2y+2=-10x-6y+34 \rightarrow m \equiv 12x+4y-32=0 \rightarrow \boxed{m \equiv 3x+y-8=0}$

2ª Forma: Aplicando que la mediatriz es perpendicular al segmento y pasa por el punto medio.

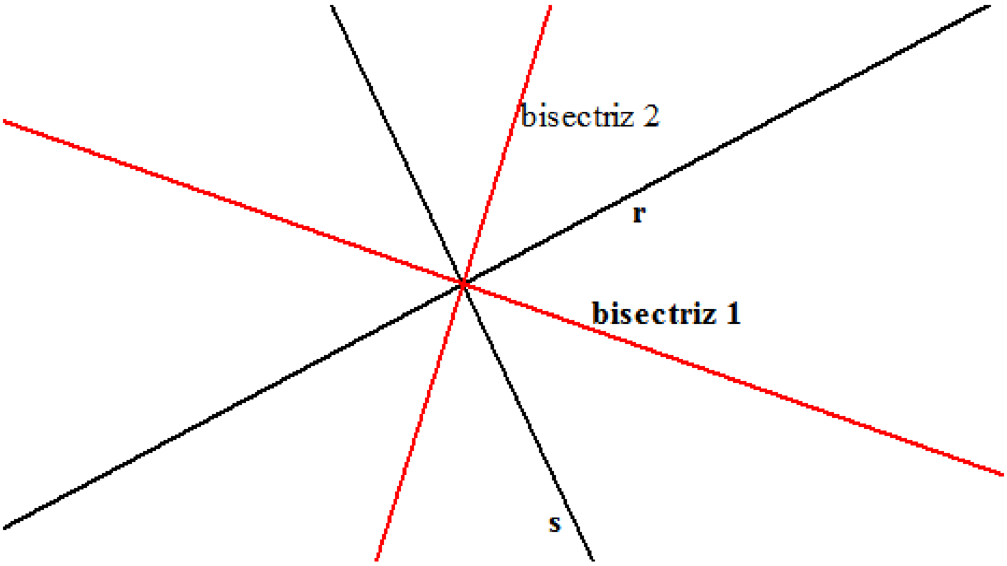
El vector $\vec{AB}=(6,2)$ es el vector normal de la mediatriz, por comodidad usamos el vector proporcional que se obtiene al multiplicarlo por ½ , $\vec{n}=(3,1)$. Luego la ecuación de la mediatriz será de la forma: $m \equiv 3x+y+C=0$.

Para calcular C nos hace falta el punto medio del segmento $\overline{AB}$, que es $M(2,2)$, que ha de pertenecer a la mediatriz: $M(2,2) \in m \rightarrow 3 \cdot 2 + 2 + C = 0 \rightarrow 8 + C = 0 \rightarrow C = -8$

Y ya tenemos que: $\boxed{m \equiv 3x + y - 8 = 0}$



Bisectrices de los ángulos que forman dos rectas: Dadas dos rectas, r y s , el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas dos lo forman dos rectas perpendiculares entre sí que son las bisectrices de los ángulos que forman las rectas dadas. Luego la condición a cumplir es que: $d(P,r) = d(P,s)$

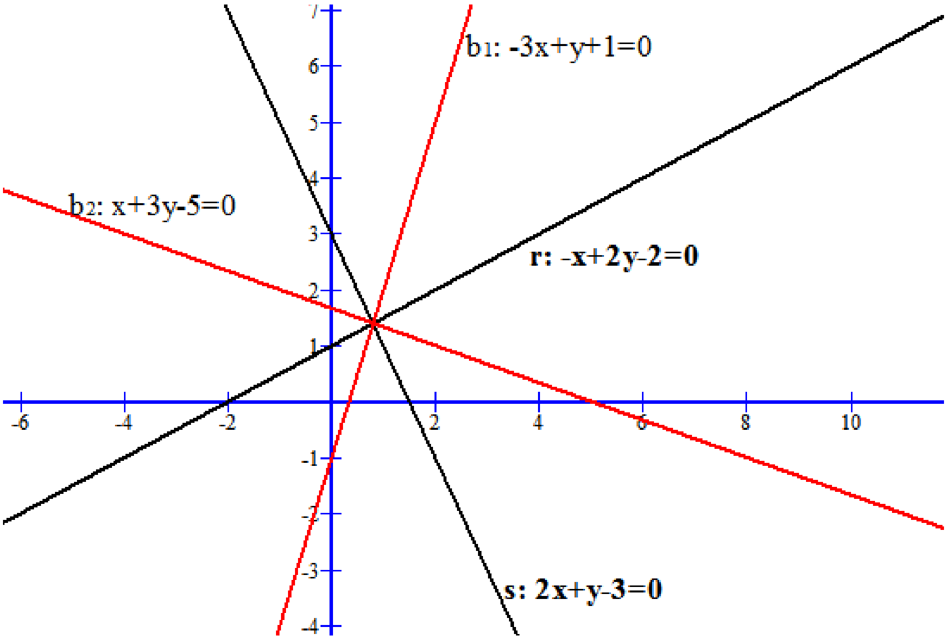


Veamos con un caso particular como calcular las bisectrices a los ángulos determinados por dos rectas.

Consideremos las rectas $r \equiv -x + 2y - 2 = 0$ y $s \equiv 2x + y - 3 = 0$. Tomamos un punto P(x,y) que ha de verificar que: $d(P,r) = d(P,s) \rightarrow \frac{|-x+2y-2|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} \rightarrow \frac{|-x+2y-2|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}} \rightarrow$

$$\left|-x+2y-2\right|=\left|2x+y-3\right| \rightarrow \begin{cases} -x+2y-2=2x+y-3 \\ \text{ó} \\ -x+2y-2=-2x-y+3 \end{cases}$$ → De aquí, operando obtenemos las ecuaciones de las dos bisectrices:

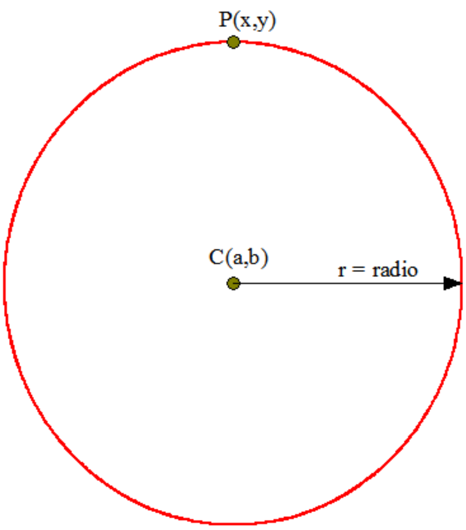
$$b_1 \equiv -3x+y+1=0 \quad \text{y} \quad b_2 \equiv x+3y-5=0$$



2. CIRCUNFERENCIA

__*Definición*__: Una __*circunferencia*__ es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano que están a igual distancia de un punto $C(a,b)$ llamado *centro*. A esa distancia fija la llamamos *radio* de la circunferencia y se nota por r .

Es decir, los puntos verifican que: $d(P,C)=r$ → $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ → Elevamos al cuadrado para quitar la raíz cuadrada y nos queda, $Circunf.\equiv (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ que es la ecuación general de una circunferencia de centro $C(a,b)$ y radio r



Desarrollamos la ecuación: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2bx+b^2=r^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2bx+a^2+b^2-r^2=0$

Nos queda una expresión del tipo : $Circunf.\equiv x^2+y^2+Ax+By+C=0$, donde $\begin{cases} a=\dfrac{-A}{2} \\ b=\dfrac{-B}{2} \\ r=\sqrt{\left(\dfrac{A}{2}\right)^2+\left(\dfrac{B}{2}\right)^2-C} \end{cases}$

Ejemplo: Dar la ecuación general de la circunferencia de centro $O(1,1)$ y radio $r=6$

$$Circunf.\equiv (x-1)^2+(y-1)^2=36$$

Ejemplo: Dada la ecuación general $Circunf.\equiv (x+2)^2+(y-3)^2=25$ de una circunferencia, tenemos que:

Centro: $O(-2,3)$ Radio: $r=\sqrt{25}=5$

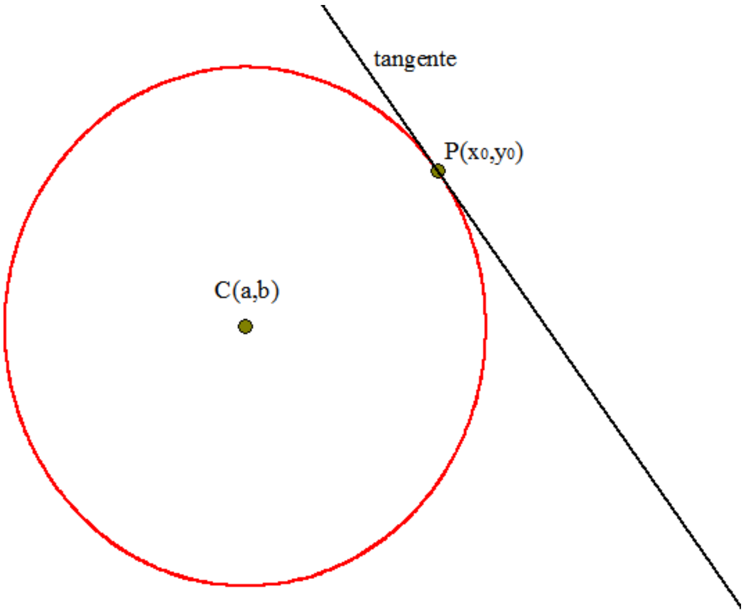
Ejemplo: Calcula el centro y el radio de la circunferencia $Circunf.\equiv x^2+y^2-6x+4y-3=0$

$$\begin{cases} a=\dfrac{-(-6)}{2}=3 \\ b=\dfrac{-4}{2}=-2 \\ r=\sqrt{\left(\dfrac{-6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{4}{2}\right)^2-(-3)}=\sqrt{9+4+3}=4 \end{cases} \Rightarrow \text{Centro O}(3,-2) \text{ y radio } r=4$$

Recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos:

Dada una circunferencia $Circunf.\equiv (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ y un punto de ella $P(x_0,y_0)$, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente en el punto $P(x_0,y_0)$ es:

$$t\equiv y-y_0=-\frac{x_0-a}{y_o-b}(x-x_0)$$



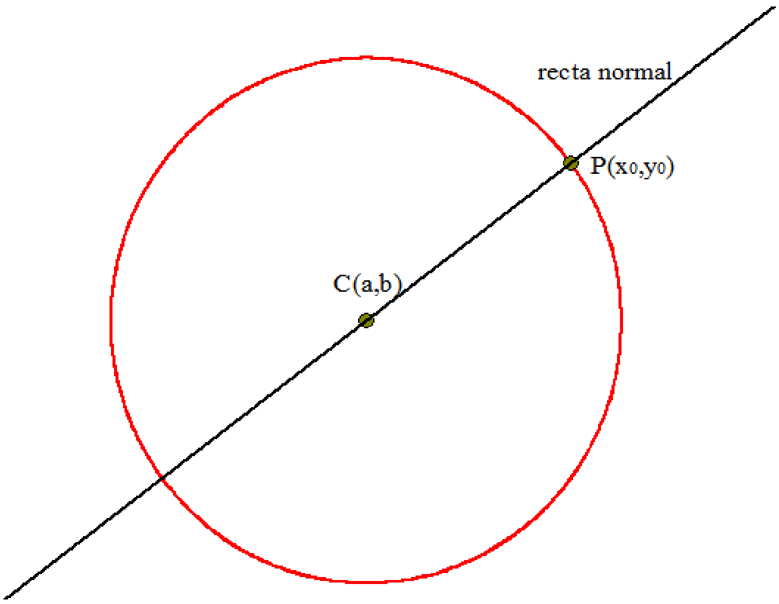
Ejemplo: Hallar la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la circunferencia $Circunf. \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ en el punto $P(-5,-1)$

Como vemos el centro es: C(-2,3), luego $t \equiv y-(-1) = -\dfrac{-5-(-2)}{-1-3}(x-(-5))$ → $t \equiv y+1 = \dfrac{-3}{4}(x+5)$

Recta normal a una circunferencia en uno de sus puntos:

Dada una circunferencia $Circunf. \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ y un punto de ella $P(x_0, y_0)$, la ecuación punto-pendiente de la recta normal en el punto $P(x_0, y_0)$ es:

$$n \equiv y - y_0 = \frac{y_0 - b}{x_o - a}(x - x_0)$$



Ejemplo: Hallar la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la circunferencia $Circunf. \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ en el punto $P(-5,-1)$

Como vemos el centro es: C(-2,3), luego $n \equiv y-(-1) = \frac{-1-3}{-5-(-2)}(x-(-5))$ → $n \equiv y+1 = \frac{4}{3}(x+5)$

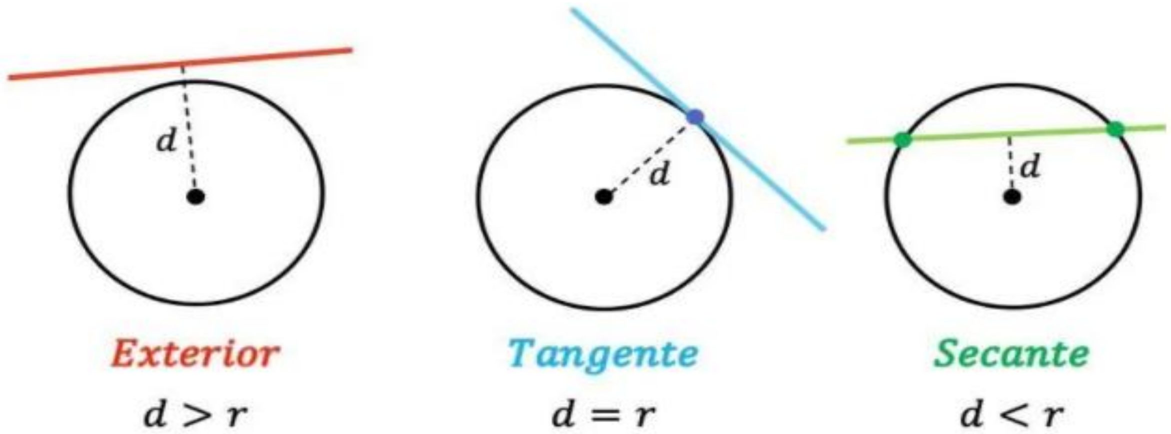
Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Hay que resolver el sistema formado por la ecuación de la circunferencia y la recta, que puede tener:

- Dos soluciones: La recta corta a la circunferencia en dos puntos
- Una solución: La recta es tangente a la circunferencia
- Ninguna solución: La recta es exterior a la circunferencia

También lo podemos saber comparando la distancia de la recta al centro de la circunferencia. Sea $d = d(recta, Centro)$, entonces:

- Si $d > r$, la recta es exterior a la circunferencia, no la corta.
- SI $d < r$, la recta corta en dos puntos a la circunferencia (son secantes) y si $d = 0$, además la recta pasa por el centro de la circunferencia.
- Si $d = r$, la recta es tangente a la circunferencia



Ejemplo: Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv x - y - 3 = 0$ y la circunferencia $Circunf. \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

El centro de la circunferencia es $O(-2,3)$, ahora calculamos la distancia del centro a la recta:

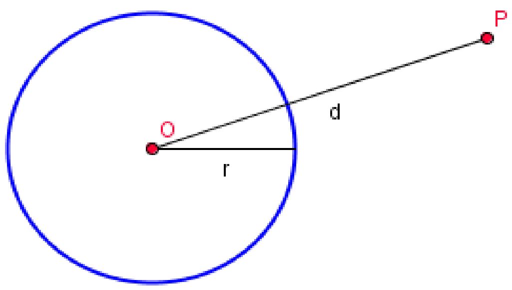
$d = \frac{|(-2)-3-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. Como $r = 5 < 4\sqrt{2} = d$, la recta es exterior a la circunferencia.

Potencia de un punto a una circunferencia

Sea un punto $P(c,d)$ y una circunferencia de centro $O(a,b)$ y radio r. Consideremos $d = d(P,O)$, entonces:

Definición: Se llama potencia del punto P a la circunferencia a $d^2 - r^2$.

$Pot = d^2 - r^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2 - r^2$ que es el resultado de sustituir las coordenadas de $P(c,d)$ en la ecuación de la circunferencia, por lo tanto, también $Pot = c^2 + d^2 + A{\cdot}c + B{\cdot}d + C$



- El punto es exterior a la circunferencia $\Leftrightarrow Pot > 0$
- El punto es interior a la circunferencia $\Leftrightarrow Pot < 0$
- El punto es de la circunferencia $\Leftrightarrow Pot = 0$

Ejemplo: Calcula la potencia del punto $P(2,-1)$ respecto de la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 1 = 0$

Sustituimos $Pot = 2^2 + (-1)^2 - 8 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 4 + 1 - 16 + 2 - 1 = -10$, por tanto el punto es interior a la circunferencia

Eje radical de dos circunferencias

Definición: Se llama eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto a ambas.

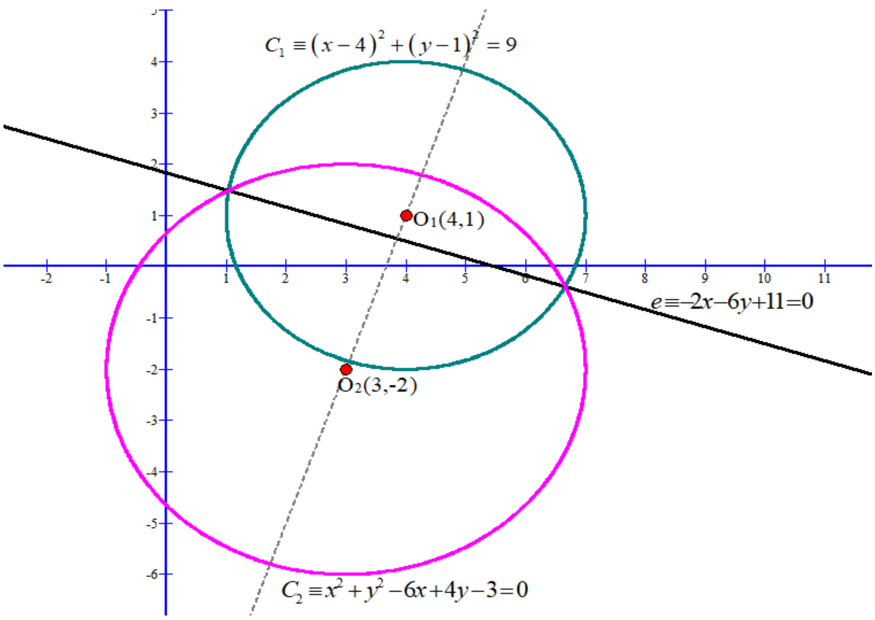
El eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular al segmento que une sus centros.

Ejemplo: Calcula el eje radical de las circunferencias $C_1 \equiv (x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

El eje radical se obtiene igualando las dos ecuaciones, pero en la primera circunferencia pasamos el 9 al otro miembro:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 - 9 = x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 - 9 = x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3$$
$$\Rightarrow -8x + 16 - 2y + 1 - 9 = -6x + 4y - 3 \Rightarrow e \equiv -2x - 6y + 11 = 0$$

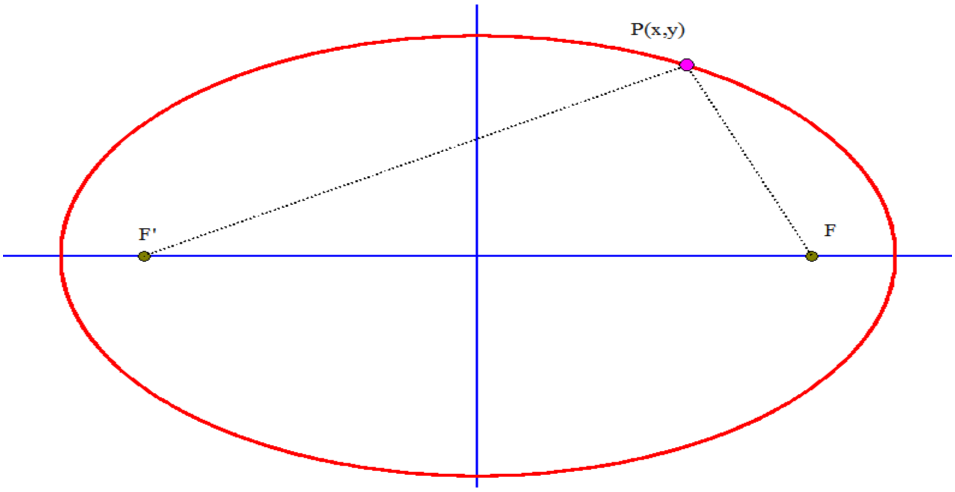
Gráficamente se muestra la situación en el siguiente dibujo:



3. ELIPSE

Definición: Una elipse es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F', llamados focos, es una cantidad constante.

Es decir se tiene que $d(P,F)+d(P,F')=$ constante



Elementos de una elipse

Focos: Son los puntos F y F'

Ejes de simetría: Son las rectas respecto de las cuales la elipse es simétrica

Centro: Punto donde se cortan los ejes

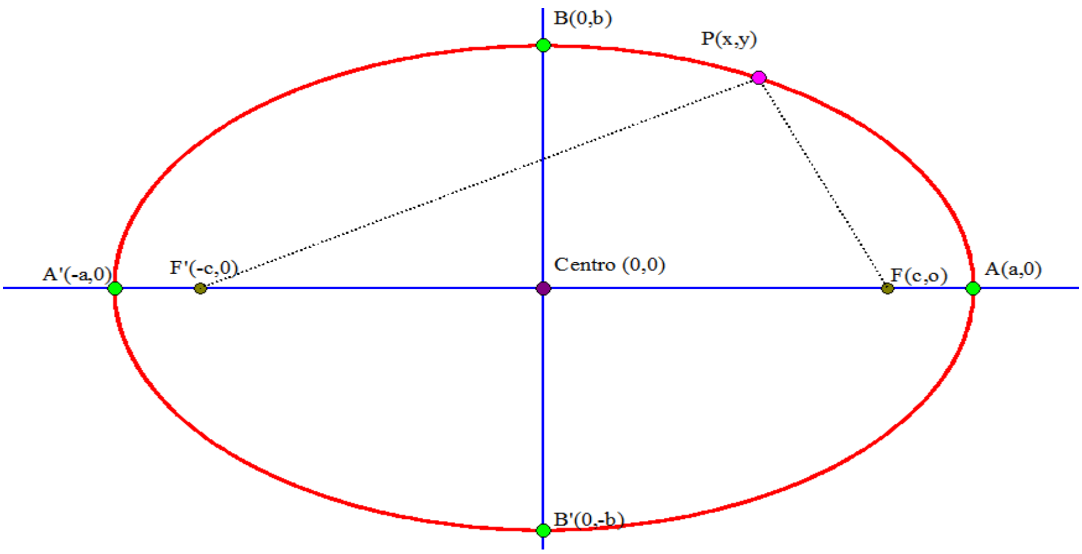
Vértices: Puntos de corte de la elipse con los ejes. Son los puntos A, A', B y B'

Eje mayor: Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud $2a$

Eje menor: Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud $2b$

Distancia focal: Es la longitud del segmento $\overline{FF'}$, que es $2c$

Tenemos el siguiente gráfico o dibujo para una elipse de centro (0,0) y ejes de simetría los ejes cartesianos



Se cumple siempre que: $a^2 = b^2 + c^2$

La ecuación de una elipse en forma reducida (con centro el origen de coordenadas) es de la forma:

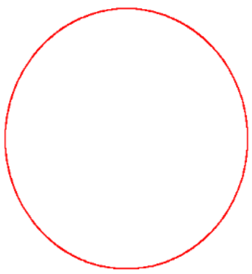
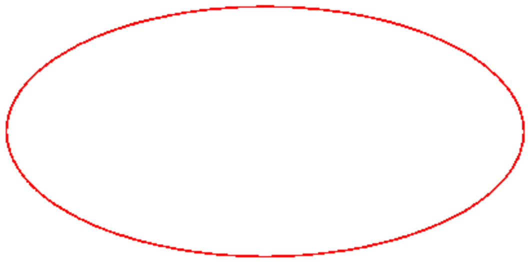
$$Elipse \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ si el eje mayor está sobre OX}$$

O bien

$$Elipse \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ si el eje mayor está sobre OY}$$

Definición: Se llama excentricidad de una elipse al achatamiento que esta presenta y se calcula como: $e = \dfrac{c}{a}$

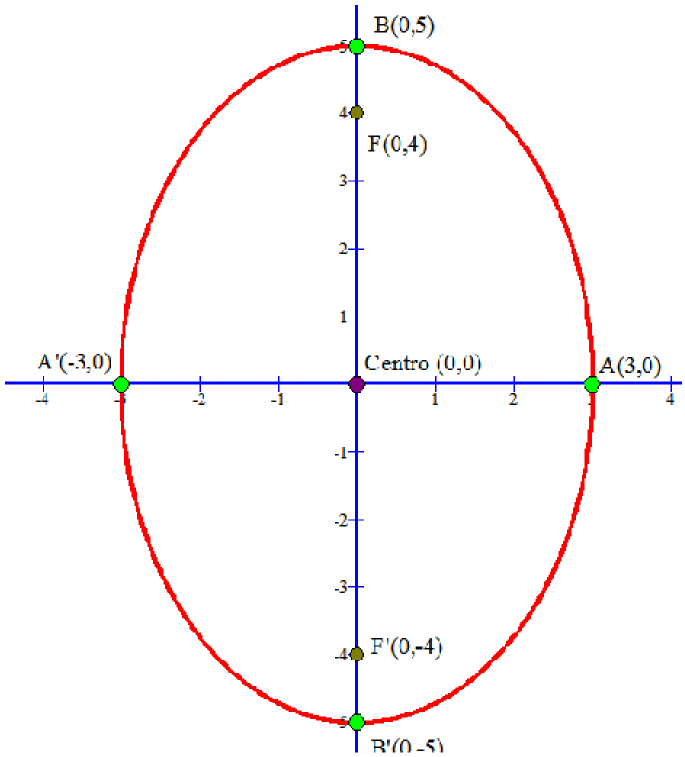
Tenemos que dependiendo de los valores de la excentricidad:

$e = 0$	$0 < e < 1$	$e = 1$
La elipse es una circunferencia, pues los focos coinciden con el centro 	Es una elipse normal, cuanto más próximo a 1 más achatada estará 	La elipse está totalmente achatada o aplastada, es un segmento

Ejemplo: Dada la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. Se pide:

a) Eje mayor: $a^2 = 25 \rightarrow a = 5$. Luego eje mayor = 10
b) Eje menor: $b^2 = 9 \rightarrow b = 3$. Luego eje menor = 6
c) Distancia focal: Como sabemos que $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 5^2 = 3^2 + c^2 \rightarrow c = 4$ Por tanto, distancia focal = 8

Gráficamente nos queda así, y como vemos el eje mayor está sobre OY



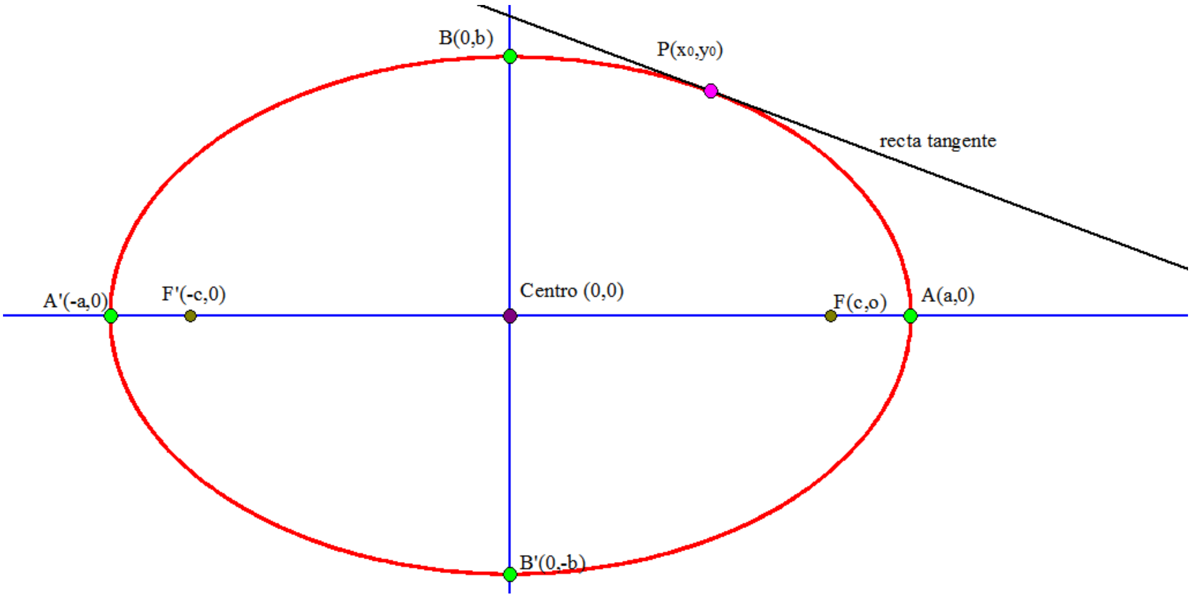
<u>Ejemplo</u>: Da la ecuación reducida de la elipse cuyo eje menor está sobre OY y mide 12 y cuya distancia focal es 16.

Tenemos que $2b = 12 \rightarrow b = 6$ Y además $2c = 16 \rightarrow c = 8$ Por tanto, $a^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow a = 10$

Y el eje mayor esta sobre OX, así que la ecuación es: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

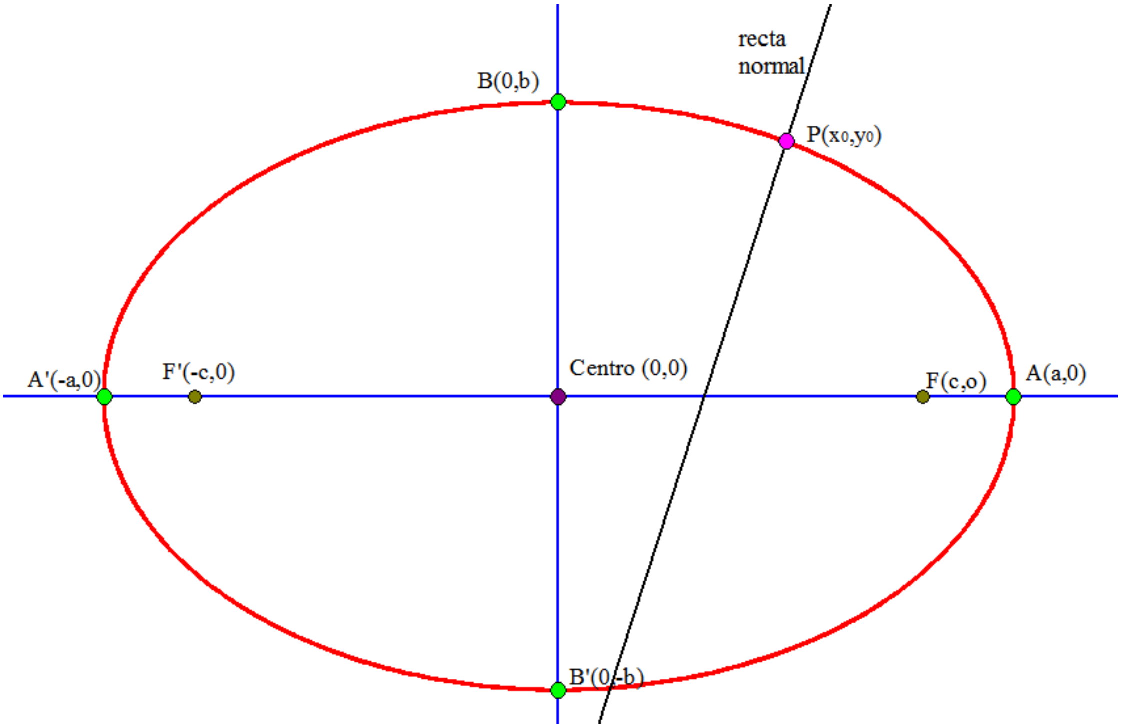
<u>Recta tangente a una elipse en uno de sus puntos</u>:

Dada una elipse $Elipse \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto de ella $P(x_0, y_0)$, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ es: $\boxed{t \equiv y - y_0 = -\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_o}(x - x_0)}$



<u>Recta normal a una elipse en uno de sus puntos</u>:

Dada una elipse $Elipse \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto de ella $P(x_0, y_0)$, la ecuación punto-pendiente de la recta normal en el punto $P(x_0, y_0)$ es: $\boxed{n \equiv y - y_0 = \frac{a^2 \cdot y_0}{b^2 \cdot x_o}(x - x_0)}$



<u>Ejemplo</u>: Dada la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, calcular la tangente y la normal en el punto $P_0\left(5, 3\sqrt{3}\right)$

Tenemos aplicando las fórmulas pertinentes que:

$t \equiv y-3\sqrt{3}=-\dfrac{36\cdot 5}{100\cdot 3\cdot\sqrt{3}}(x-5) \rightarrow$ Operando y simplificando $t \equiv y-3\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}(x-5)$

Y la recta normal queda: $n \equiv y-3\sqrt{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}(x-5)$

4. HIPÉRBOLA

Definición: La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano cuya diferencia de distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos F y F', llamados focos, es una cantidad constante.

$$|d(P,F)-d(P,F')| = \text{constante}$$

La ecuación reducida de una hipérbola es: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Elementos característicos de una hipérbola

Focos: son los puntos F y F'

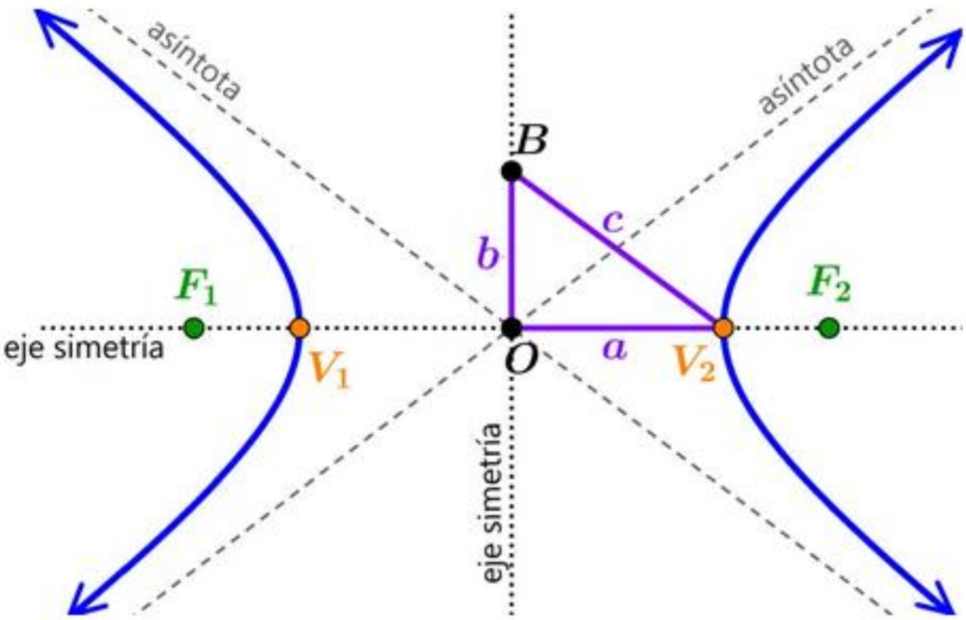
Ejes de simetría: son las rectas respecto de las cuales la hipérbola es simétrica

Centro: Donde se cortan los ejes de simetría, el punto O .

Eje real: es el del segmento que mide $2a$

Eje imaginario: es el del segmento de longitud $2b$

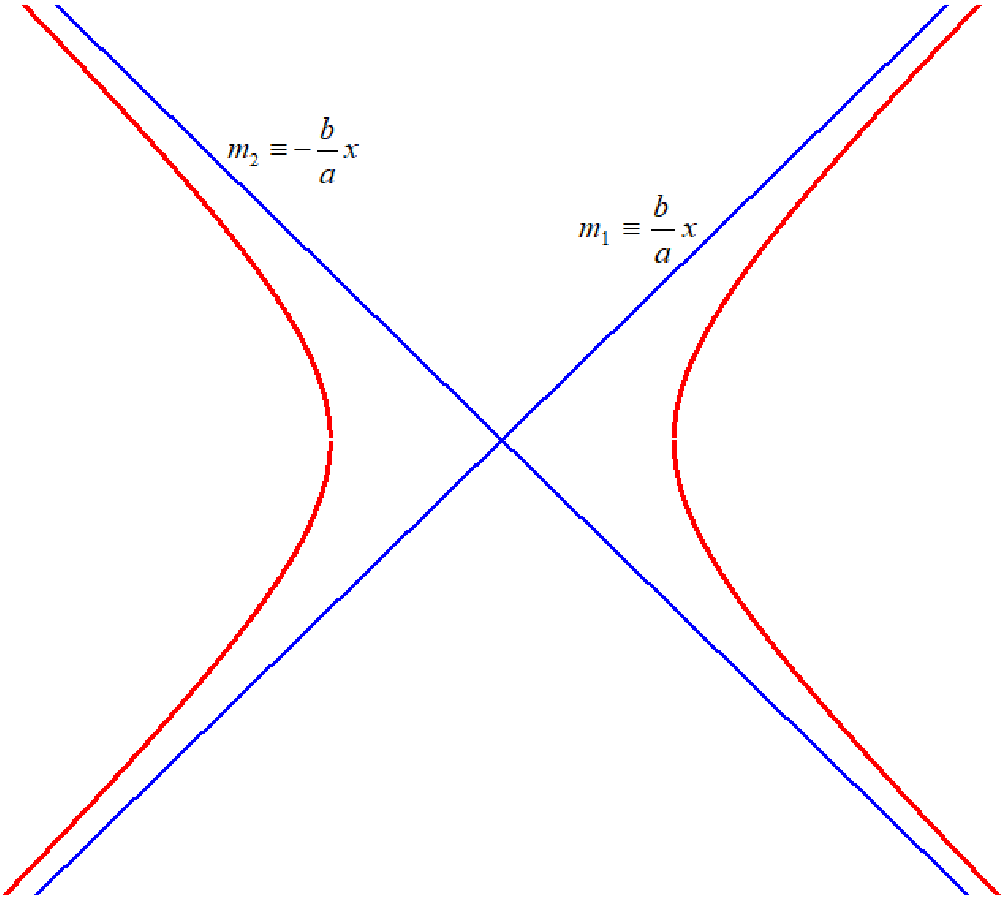
Vértices: son los puntos V_1 y V_2



Asíntotas de la hipérbola

Las rectas que se aproximan tanto a la hipérbola como se quiera reciben el nombre de asíntotas. En una hipérbola hay dos asíntotas, que en el caso de la hipérbola reducida son:

$$m_1 \equiv \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad m_2 \equiv -\frac{b}{a}x$$



5. PARÁBOLA

Definición: La parábola es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano que están a igual distancia de un punto F, llamado foco, y de una recta d, llamada directriz.

$$d(P,F) = d(P,d)$$

La ecuación reducida de una parábola es: $y^2 = 2p \cdot x$

Elementos característicos de una parábola

Foco: es el punto F

Directriz: es la recta fija d

Parámetro p: es la distancia del foco a la directriz

Eje de simetría: es la recta perpendicular a la directriz que pasas por el foco

<u>Vértice</u> : es el punto de intersección del eje de simetría con la parábola, el punto V . La distancia del foco a la directriz y al foco es $\frac{p}{2}$,es decir, $d(V,F)=d(V,d)=\frac{p}{2}$