UNIDAD 11: **FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL. FUNCIONES ELEMENTALES**

Contenido

© ManoloMat

1. EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN

- *Expresión mediante una tabla de valores*

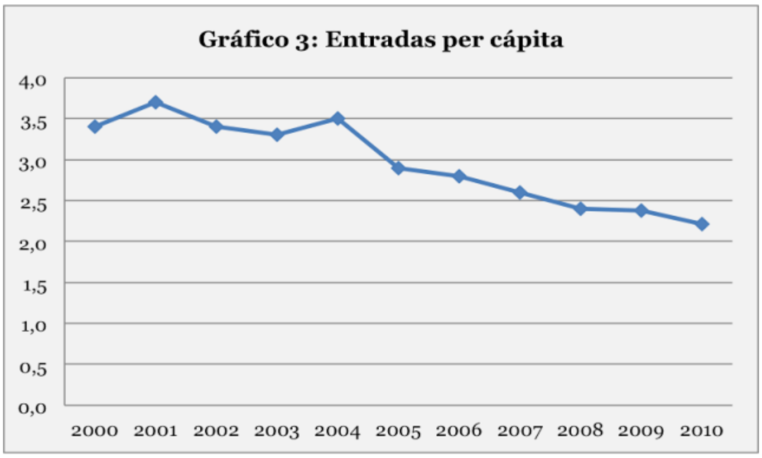
La tabla de valores de una función está formada por dos filas o columnas. En la primera fila o columna figuran los valores que toma la variable y en la segunda fila o columna están los valores correspondientes que toma la variable dependiente

Ejemplo: Tabla de valores de la función que nos da los precios de la tarifa doméstica de la luz en los años que se indican:

Años (variable independiente)	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Precio luz (€/MWH)	118,2	107,7	102,4	99,7	96,7	96,7	97,1	97,1	98,1

- *Expresión mediante una gráfica*

Las gráficas nos dan una visión cualitativa de las funciones sobre unos ejes coordenados
Ejemplo: Función que nos da las entradas de cine por persona compradas a lo largo de un año.



- *Expresión mediante una fórmula matemática o expresión algebraica*

La expresión algebraica o fórmula matemática permite calcular los valores de la variable dependiente para todos los valores que demos a la variable independiente. Se dice que la función viene dada por un criterio o fórmula.

Ejemplo: El área de un cuadrado de lado l viene dado por la función $Área(l) = l^2$

- *Expresión mediante la descripción verbal*

La descripción verbal nos proporciona una visión descriptiva y cualitativa de la relación funcional

Ejemplo: La función que liga el precio que hemos de pagar al frutero en función de la cantidad de manzanas que compremos, sabiendo que el kilogramo cuesta 0,80 €

Esta función la podemos fácilmente transformar en una expresión como sigue:

$f(x) = 0{,}80 \cdot x$ donde $x =$ nº de kilogramos de manzanas

© ManoloMat

2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. DOMINIO Y RECORRIDO

La relación existente entre dos magnitudes que pueden expresarse en las formas vistas en el apartado anterior recibe el nombre de **función**.

Una función real de variable real es una aplicación de un subconjunto de los nº reales ($\mathbb{R}$) en otro subconjunto de $\mathbb{R}$.

Se representa de la siguiente forma: $\begin{array}{c} f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \in D \to y = f(x) \end{array}$ Una "*x*" tiene una sola imagen, pero una "*y*" puede tener varias *x* que vayan a ella.

Al conjunto D se le llama dominio de definición (o simplemente dominio) de la función $y = f(x)$, y suele ser el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la función f tiene sentido. Se representa por $Dom(f)$

A "*x*" se le llama variable independiente, y representa a los valores a los que se aplica f

A "*y*" se le llama variable dependiente, y representa a los valores que se obtienen de aplicar f

Al conjunto de todos los valores que se obtienen aplicando f a todos los valores del dominio se le llama conjunto imagen o recorrido. Se representa por $\mathrm{Im}(f)$ o por $\mathrm{Recorr}(f)$

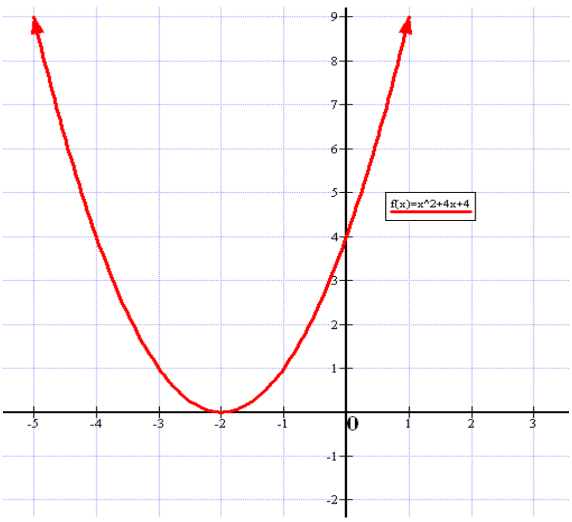
Se denomina gráfica o grafo de una función $y = f(x)$ al conjunto de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$ con $x \in Dom(f)$

Ejemplos de funciones:

$f(x) = x^2 + 1$	$y = e^x$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$g(x) = \sqrt{x-1}$	$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \le 1 \\ 3x+2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Ejemplo: Sea la función polinómica cuadrática siguiente:

$$\begin{array}{c} f: D \subseteq R \to R \\ x \in D \to y = f(x) = x^2 + 4x + 4 \end{array}$$



De forma reducida nos darán de manera habitual la función sólo mediante su criterio o fórmula. En este caso como:
$f(x) = x^2 + 4x + 4$ ó $y = x^2 + 4x + 4$

Todas las funciones polinómicas tienen por dominio todos los nº reales, salvo que explícitamente nos hagan una restricción, que no es el caso.

Así, $Dom(f) = \mathbb{R}$

El conjunto imagen o recorrido es más difícil de calcular, pues nos hace falta dibujar la función, obteniendo su gráfica, que en este caso es una parábola (ya veremos cómo se dibuja su gráfica en la unidad siguiente). Os saldrá un dibujo como el de la izquierda.

La imagen la miramos en el eje de ordenadas o eje OY (como si comprimiésemos el dibujo de la función sobre el eje OY) y obtenemos: $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

© ManoloMat

Clasificación de las funciones según su criterio o fórmula

- *Funciones*
  - Algebraicas
    - *Racionales*
      - *Polinómicas*
        - Constantes $\rightarrow$ Ej : $f(x) = -6$
        - Afines y lineales $\rightarrow$ Ej : $f(x) = 2x - 4$
        - Cuadráticas $\rightarrow$ Ej : $f(x) = 3x^2 + x - 5$
        - De grado superior a 2 $\rightarrow$ Ej : $f(x) = x^3 - x^2$
      - *Fraccionarias* : Su criterio o fórmula es una fracción con x en el denominador $\rightarrow$ Ej : $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$
    - *Irracionales* : Son aquellas funciones donde la variable independiente, x, aparece dentro de un signo radical $\rightarrow$ Ej : $f(x) = \sqrt{2x+3}$
  - *Trascendentes*
    - *Trigonométricas* : Aparece alguna función *trigonométrica*
      Ej : $f(x) = sen(x) + \cos(x) + 6$
    - *Exponenciales* : La variable "x" está en el exponente
      Ej : $f(x) = 5^{-3x}$
    - *Logarítmicas* : Aparece la "x" como argumento de algún logaritmo
      Ej : $f(x) = -4x + \ln(x)$

CÁLCULO DE DOMINIOS MEDIANTE LA FÓRMULA O CRITERIO

Dependiendo del criterio o fórmula de la función actuaremos de una forma u otra para calcular el dominio, atendiendo a las siguientes instrucciones, basadas en que no se puede dividir por 0, no se pueden obtener raíces de índice par de radicandos negativos, no existen logaritmos de números negativos:

- ***Funciones polinómicas***: Su dominio es todo R, pues al ser el criterio un polinomio nunca habrá problemas.

  Ejemplos:

$f(x) = x^4 - x^2$ $Dom(f) = \mathbb{R}$	$y = -x^2 + 1$ $Dom(f) = \mathbb{R}$	$y = -1$ $Dom(y) = \mathbb{R}$

- ***Funciones fraccionarias***: Son de la forma $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

  Su dominio son aquellos nº reales que no anulan el denominador. Matemáticamente lo expresamos de la siguiente manera: $Dom(y) = \{x \in \mathbb{R} \; / \; \mathbb{Q}(x) \neq 0\}$ (esto se lee así, "todos los nº reales tales que el polinomio denominador $\mathbb{Q}(x)$ no vale 0"

  Ejemplos:

© ManoloMat

a) $y = \frac{1}{x}$, que es una hipérbola equilátera. Tenemos que $Dom(y) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $f(x) = \frac{x-5}{x^2-3x}$ Vamos a calcular su dominio, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \setminus x^2 - 3x \neq 0\}$

Vemos dónde se anula el denominador: $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ Por tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0,3\}$

- ***Funciones irracionales***: Son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$
  - Si el índice del radical es impar (n es impar), entonces el dominio de la función f coincide con el dominio de la función g
  - Si el índice del radical es par (n es par), entonces el dominio será el conjunto de los nº reales tales que $g(x) \geq 0$

Ejemplos:

a) Calcular el dominio de $y = \sqrt[3]{2x-1}$. Como se trata de una función irracional de índice impar (3), nos fijamos en el radicando, y como se trata de una polinómica de primer grado (afín) su dominio será $\mathbb{R}$

$Dom(y) = \mathbb{R}$

b) Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{x^2-9}}$ Por ser de índice impar (5), nos fijamos en el radicando, que es una fracción algebraica. Debemos descartar para el dominio los valores que anulan el denominador

$x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ x = -3 \end{matrix} \rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3,3\}$

c) Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-9}}$ Por ser de índice par, vamos a hacer una tabla de signos para conocer donde el radicando es ≥ 0. Veamos primero donde el numerador y el denominador del radicando se anulan.

$\begin{matrix} x - 1 = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{matrix}$ Con estos tres valores dividimos la recta real en 4 intervalos abiertos y construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-3)$	(-3,1)	(1,3)	$(3,+\infty)$
x-1	-	-	+	+
x^2-9	+	-	-	+
	-	**+**	**-**	**+**

© ManoloMat

De donde deducimos que $Dom(f) = (-3,1] \cup (3,+\infty)$. Fijaos que el 1 es cerrado pues anula el numerador del radicando y tiene sentido (tendríamos una raíz cuarta de 0, que es 0), mientras que –3 y 3 van abiertos pues anulan el denominador y no tienen sentido (dividiríamos por 0)

- ***Funciones trigonométricas***:

  Las de tipo $y = sen(g(x))$ ó $y = \cos(g(x))$ tienen por dominio el dominio de $g(x)$

  Las de tipo $y = tg(g(x))$ tienen por dominio: $Dom(tg(g(x)) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$, que suele ser difícil de calcular.

  Ejemplo: Calcular el dominio de $f(x) = sen\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}\right)$ Os dejo la solución y practicad vosotros

  $$Dom(f) = (-\infty,-3) \cup [2,+\infty)$$

- ***Funciones exponenciales***:

  Las exponenciales $f(x) = a^{g(x)}$ tienen por dominio el mismo que el de la función exponente, $g(x)$.

  Ejemplos:

  a) $y = 3^{\frac{2}{2x-1}} \rightarrow Dom(y) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $f(x) = e^{\sqrt{x}} + 2 \rightarrow Dom(f) = [0,+\infty)$

- ***Funciones logarítmicas***:

  El dominio de estas funciones, $f(x) = \log_a(g(x))$ son los nº reales tales que hacen $g(x) > 0$

  Ejemplo: $f(x) = \ln(1-x^2)$ Matemáticamente tenemos que calcular $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 > 0\}$

  Resolvemos $1 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$ y ahora hacemos la tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	(-1,1)	$(1,+\infty)$
$1-x^2$	-	+	-

  Por tanto, $Dom(f) = (-1,1)$. Observad que 1 y –1 son abiertos pues $\ln 0$ no tiene sentido

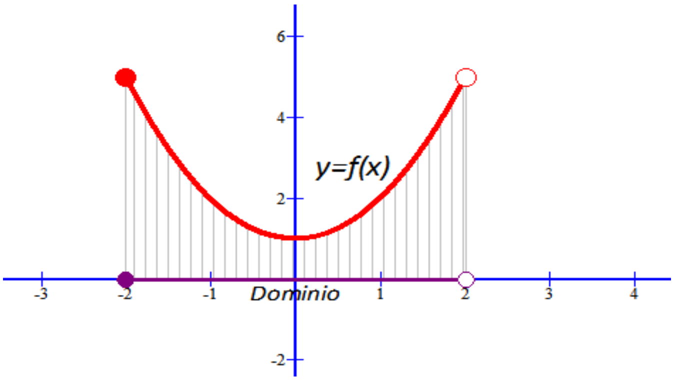
CÁLCULO DE DOMINIOS MEDIANTE LA GRÁFICA

El dominio de la función viene dado por el conjunto de valores del eje de abscisas o eje OX para los cuales la función existe. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo: Calcular el dominio de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

a)

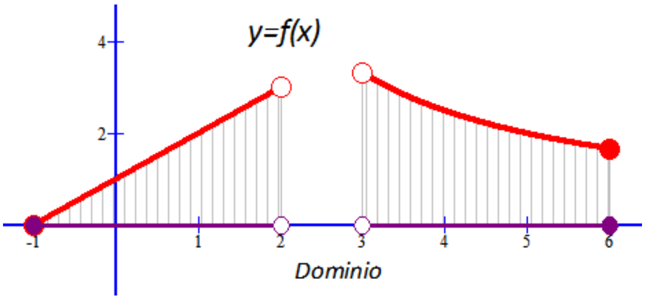
© ManoloMat



El dominio de esta función es la parte del eje OX que tienen correspondientes valores de la gráfica (existe f(x)).
Por tanto,

$$Dom(f) = [-2,2)$$

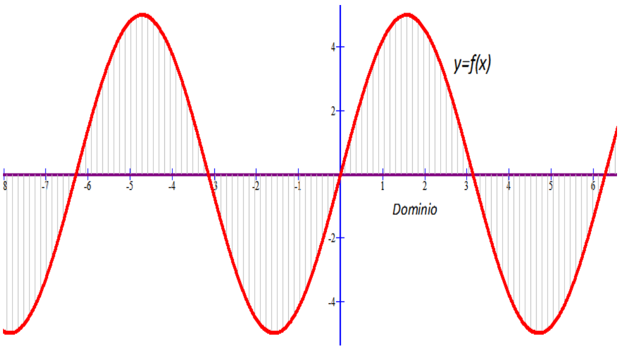
b)



En este caso tenemos que:

$$Dom(f) = [-1,2) \cup (3,6]$$

c)



En este caso tenemos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

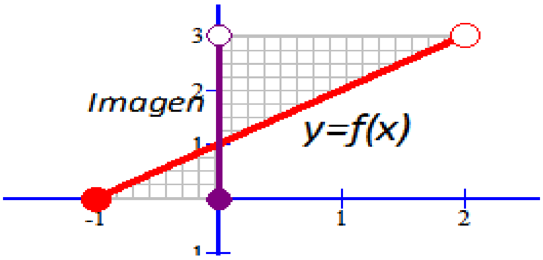
<u>CÁLCULO DE LA IMAGEN O RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE LA GRÁFICA</u>

Sólo calcularemos imágenes o recorridos de funciones mediante gráficas.

El recorrido de una función viene dado por el conjunto de valores del eje de ordenadas o eje OY que son alcanzados por la función.

<u>Ejemplos</u>: Calcular el recorrido de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

a)

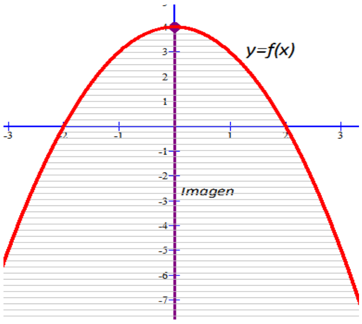


El recorrido de esta función es la parte del eje OY que tienen correspondientes valores de la gráfica (existe f(x)).

Por tanto,

$$\operatorname{Re}corr(f) = [0,3)$$

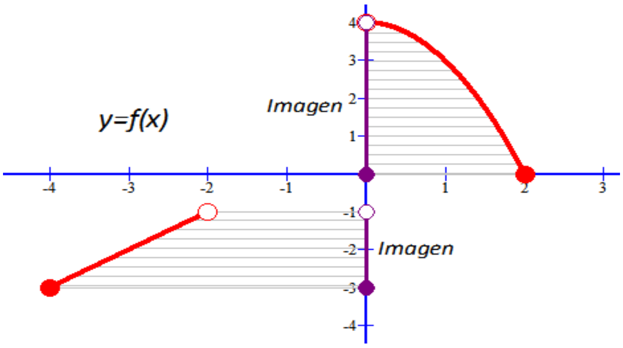
b)



En este caso tenemos que:

$$\operatorname{Im}(f) = (-\infty,4]$$

c)



En este caso tenemos que:

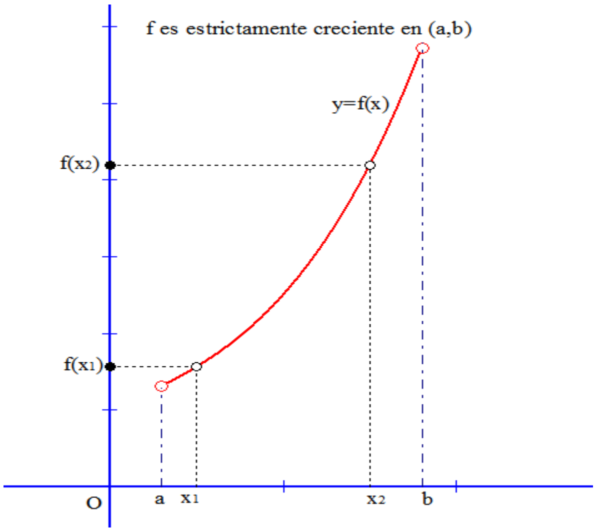
$$\operatorname{Im}(f) = [-3,-1) \bigcup [0,4)$$

3. MONOTONÍA

Definición: Una función $y = f(x)$ **es estrictamente creciente** en un intervalo (a,b) si para cualquier par de valores del intervalo, x_1 y x_2, con $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Matemáticamente lo podemos escribir así:

$y = f(x)$ es estrictamente creciente en un intervalo $(a,b) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Gráficamente lo vemos así:

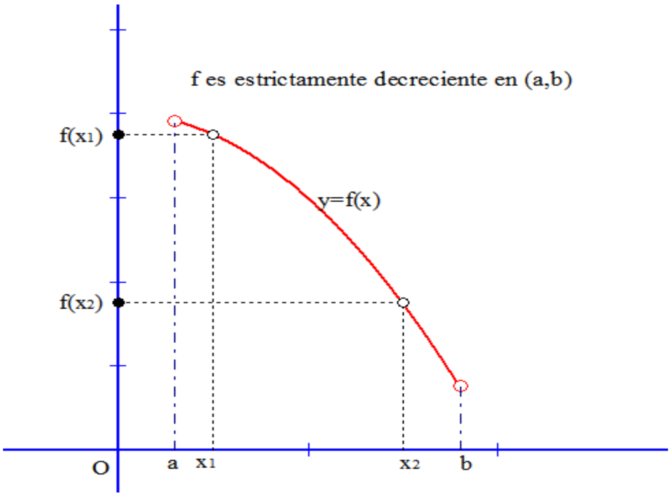


© *ManoloMat*

__Definición__: Una función $y = f(x)$ **es estrictamente decreciente** en un intervalo (a,b) si para cualquier par de valores del intervalo, x_1 y x_2, con $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$. Matemáticamente lo podemos escribir así:

$y = f(x)$ es estrictamente decreciente en un intervalo $(a,b) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

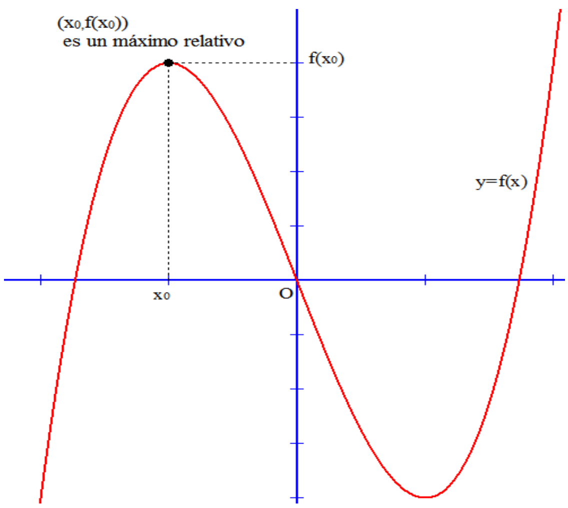
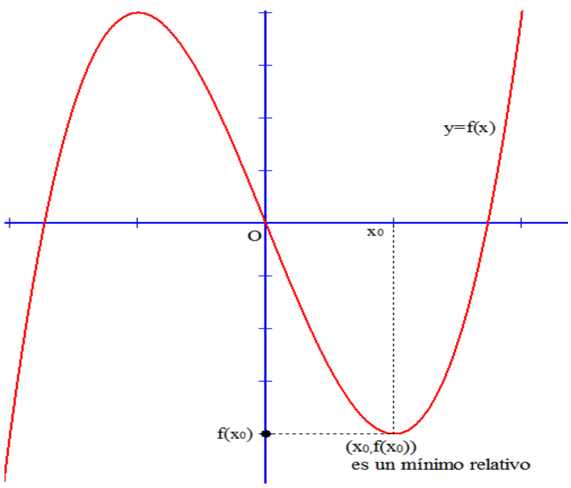
Gráficamente lo vemos así:



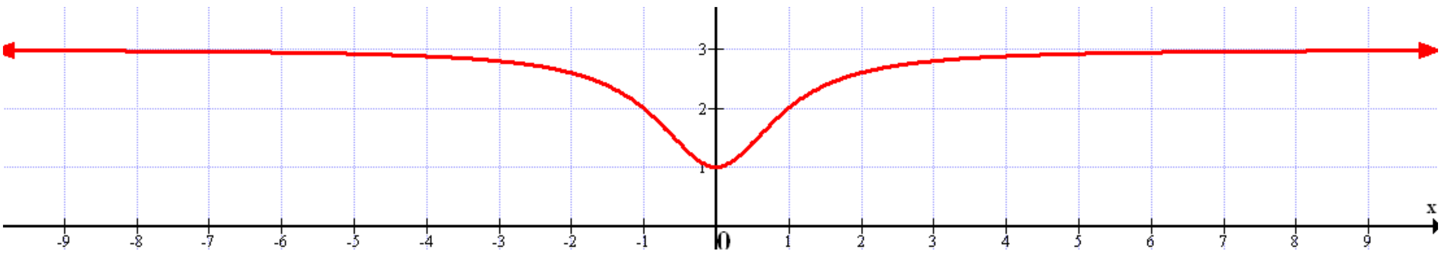
4. EXTREMOS RELATIVOS

__Definición__: Una función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo en un punto de abscisa x_0, si hay un intervalo abierto que contiene a x_0, donde $f(x_0)$ es el mayor valor que alcanza la función.

__Definición__: Una función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo en un punto de abscisa x_0, si hay un intervalo abierto que contiene a x_0, donde $f(x_0)$ es el menor valor que alcanza la función.

MÁXIMO RELATIVO	MÍNIMO RELATIVO
	

__Ejemplo__: Supongamos que tenemos una función cuya gráfica es como sigue:

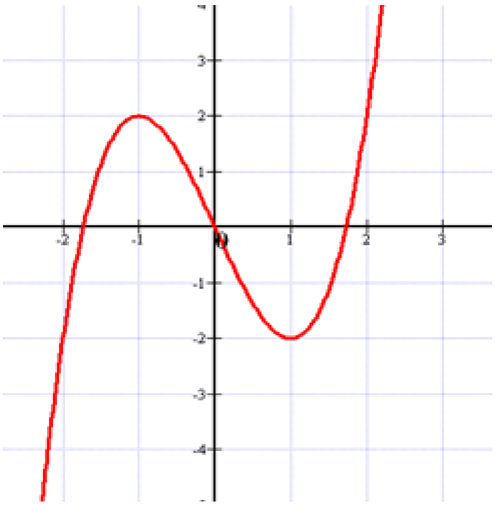


© ManoloMat

Viendo el dibujo podemos decir que:

- En $(-\infty,0)$, la función es estrictamente decreciente (se puede decir decreciente)
- En $(0,+\infty)$, la función es estrictamente creciente(se puede decir creciente)
- En $x_0 = 0$ (o mejor dicho en el punto (0,1)) , la función presenta un mínimo relativo
- No tiene máximos relativos
- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- Su imagen es $[1,3)$

Ejemplo: Lo mismo para



f es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
f es decreciente en $(-1,1)$
f tiene un máx. relativo en $x_0 = -1$. También se puede decir que tiene un máximo relativo en (-1,2)
f tiene un mín. relativo en $x_0 = 1$. También se puede decir que tiene un mínimo relativo en (1,-2)
Su dominio es todo $\mathbb{R}$
Su imagen es todo $\mathbb{R}$

5. FUNCIONES ACOTADAS. EXTREMOS ABSOLUTOS

Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada superiormente por un nº real K si todos los valores que toma la función son menores o iguales que K, es decir, $f(x) \le K \quad \forall x \in Dom(f)$ (NOTA: $\forall$ = para todo)

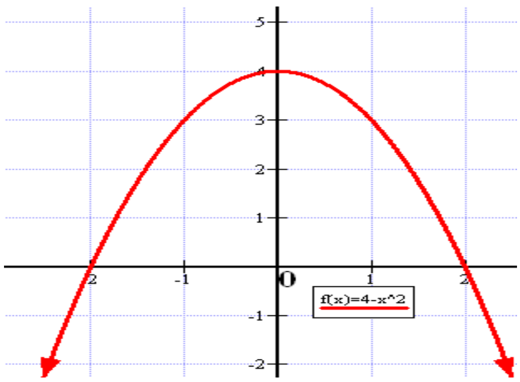
A K se le llama cota superior.

Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada inferiormente por un nº real P si todos los valores que toma la función son mayores o iguales que K, es decir, $f(x) \ge P \quad \forall x \in Dom(f)$

A P se le llama cota inferior

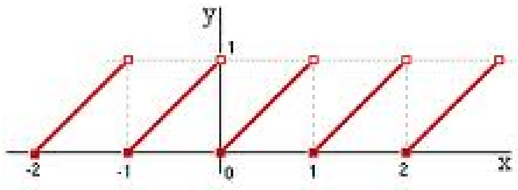
Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada si lo está superior e inferiormente, es decir, $P \le f(x) \le K$ $\forall x \in Dom(f)$

Ejemplo: La función $f(x) = 4 - x^2$ está acotada superiormente por 4 (ó 5 ó 6 ó ...) pero no está acotada inferiormente.



© ManoloMat

Ejemplo: La función de la gráfica está acotada. Por ejemplo, tiene como cota superior 1 (o cualquier otro nº mayor que 1) y como una cota inferior 0 (o cualquier otro nº menor que 0)



Definición: Se llama **extremo superior o supremo** a la menor de las cotas superiores de una función acotada superiormente.

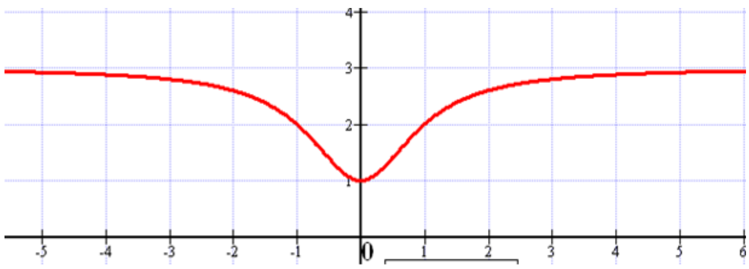
Definición: Se llama **máximo absoluto** de una función acotada superiormente al extremo superior o supremo cuando es alcanzado por la función.

Definición: Se llama **extremo inferior o ínfimo** a la mayor de las cotas inferiores de una función acotada inferiormente.

Definición: Se llama **mínimo absoluto** de una función acotada inferiormente al extremo inferior o ínfimo cuando es alcanzado por la función.

Ejemplo:

Dada la siguiente gráfica
Podemos observar que es una función acotada. La menor de las cotas superiores es 3 (3 es el extremo superior o supremo) pero la función no lo alcanza, luego no tiene máximo absoluto
La mayor de las cotas inferiores es 1 (1 es el extremo inferior o ínfimo) y además lo alcanza es el mínimo absoluto. Del mínimo absoluto podemos decir que es el punto $(0,1)$, que lo alcanza en $x=0$ o bien que es 1. Nosotros habitualmente usaremos las dos primeras expresiones.

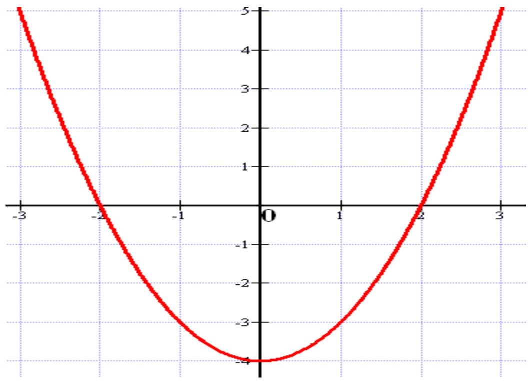


6. FUNCIONES SIMÉTRICAS

Definición: Una función $y=f(x)$ se dice **simétrica respecto del eje de ordenadas o eje OY** o que tiene **simetría par** si $f(-x)=f(x)$ para cualquier $x\in Dom(f)$.

Ejemplo: La función $f(x)=x^2-4$ es par como vemos por su representación gráfica.

Matemáticamente demostramos que es par haciendo lo siguiente: $f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$



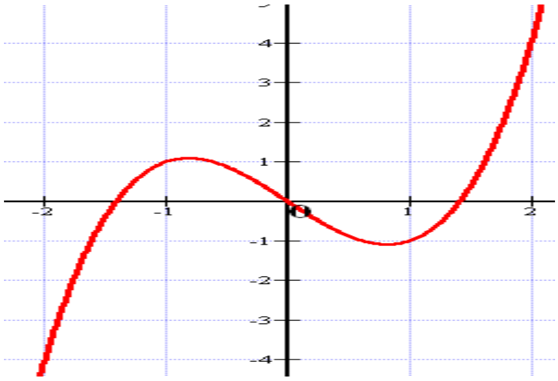
© ManoloMat

<u>*Definición*</u>: Una función $y = f(x)$ es **simétrica respecto del origen de coordenadas** o que tiene **simetría impar** si $f(-x) = -f(x)$

<u>Ejemplo</u>: La función $f(x) = x^3 - 2x$ es impar como vemos por su representación gráfica

Matemáticamente demostramos que es impar haciendo lo siguiente:

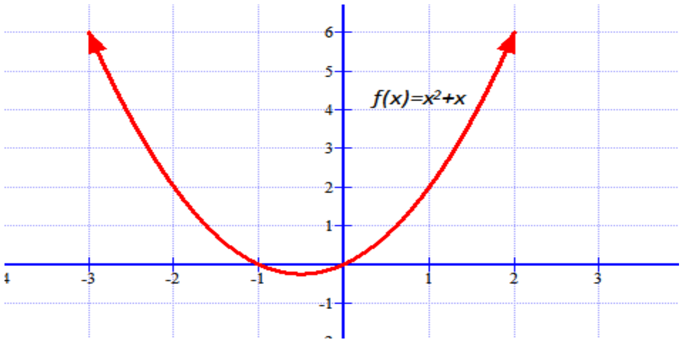
$$f(-x) = (-x)^3 - 2\cdot(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$$



<u>*Ejemplo*</u>: La función $f(x) = x^2 + x$ no tiene simetría, no es par ni impar.

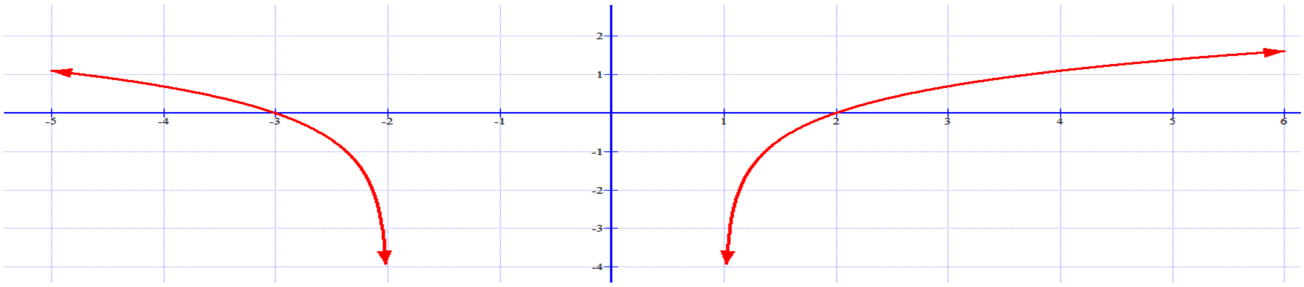
Matemáticamente lo demostramos pues:

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq \begin{cases} f(x) = x^2 + x \\ -f(x) = -x^2 - x \end{cases}$$



<u>Propiedad</u>: Para que una función pueda ser simétrica (par o impar) su dominio ha de ser simétrico respecto al origen de coordenadas

<u>Ejemplo</u>: La función dada por la gráfica siguiente no es simétrica pues su dominio es $Dom(f) = (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$

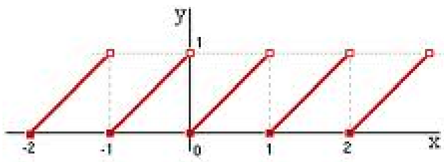


7. FUNCIONES PERIÓDICAS

Son funciones que se van repitiendo a lo largo del eje OX

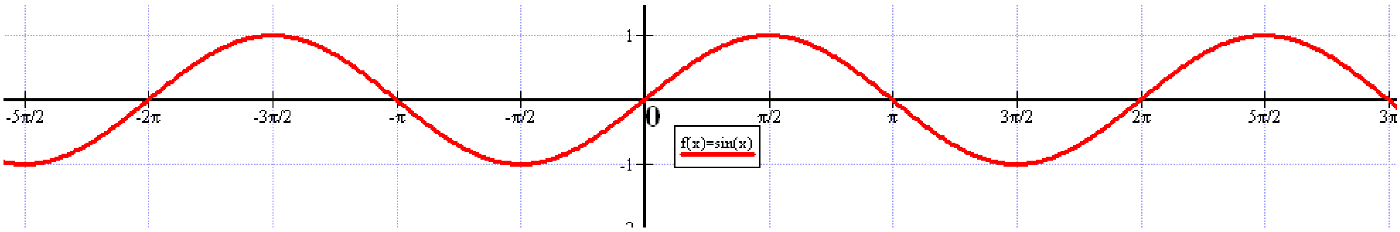
<u>*Definición*</u>: Una función $y = f(x)$ es **periódica de periodo T** (T positivo), si cumple que $f(x + kT) = f(x)$ para cualquier valor de $x \in Dom(f)$

<u>Ejemplo</u>: La función parte decimal $Dec(x) = x - E(x)$ es periódica de periodo 1.



<u>Ejemplo</u>: La función $f(x) = senx$ es periódica de periodo 2π

© ManoloMat



8. ASÍNTOTAS. RAMAS INFINITAS

TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN HACIA UN VALOR CONSTANTE CUANDO *x* TIENDE A $\pm\infty$

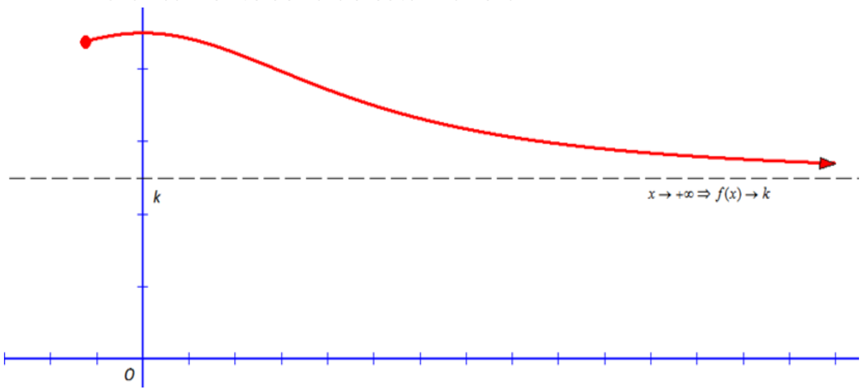
Una función **tiende hacia un valor constante *k*** cuando al aumentar o disminuir los valores de la variable independiente, los correspondientes valores de la variable dependiente se van aproximando al valor constante k.

Este comportamiento se expresa de las siguientes formas:

- Cuando x tiende a más infinito, $y = f(x)$ tiende a *k*. Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to k$

Diremos que la recta $y = k$ es una ***asíntota horizontal*** en $+\infty$ de la función $y = f(x)$

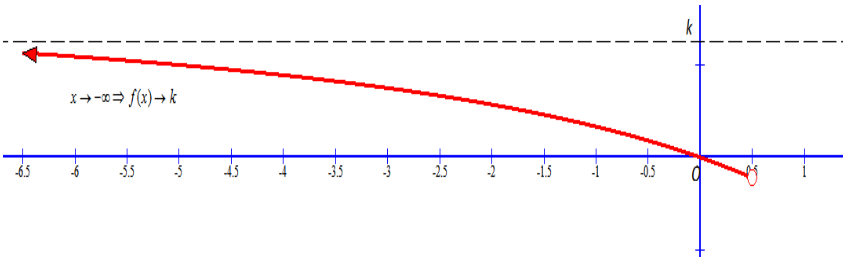
Gráficamente sería de esta manera:



- Cuando x tiende a menos infinito, $y = f(x)$ tiende a k. Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to k$

Diremos que la recta $y = k$ es una ***asíntota horizontal*** en $-\infty$ de la función $y = f(x)$

Gráficamente sería de esta manera:



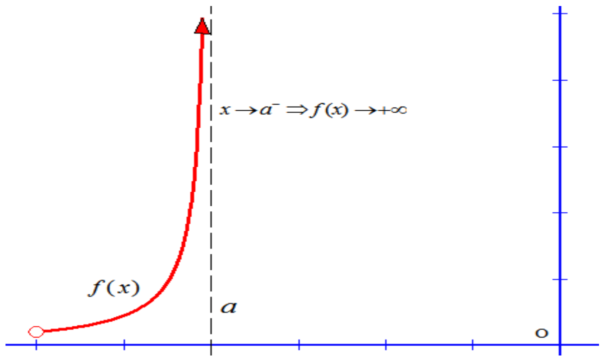
TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN HACIA $\pm\infty$ CUANDO x TIENDE A UN VALOR CONSTANTE

En la tendencia de una función a más o menos infinito cuando *x* tiende a un valor constante *a* pueden darse los siguientes casos:

- Si x tiende a "a" por la izquierda y entonces $f(x)$ tiende a más infinito. Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$

Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la izquierda de la función $y = f(x)$ hacia $+\infty$

Gráficamente sería de esta manera:

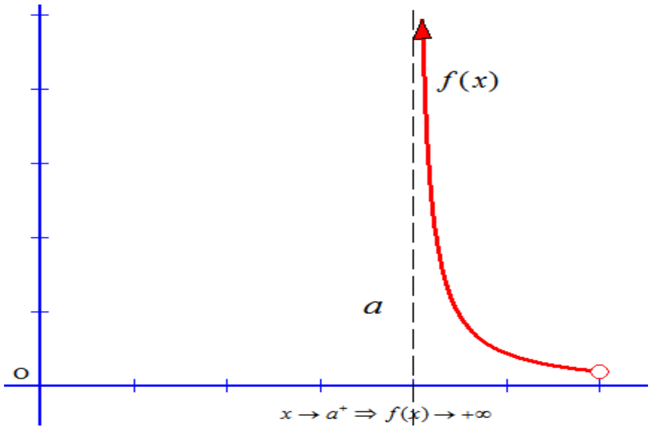


© ManoloMat

- Si x tiende a “ a ” por la derecha y entonces $f(x)$ tiende a más infinito.
  Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to a^{+} \Rightarrow f(x) \to +\infty$

Diremos que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* por la derecha de la función $y = f(x)$ hacia $+\infty$

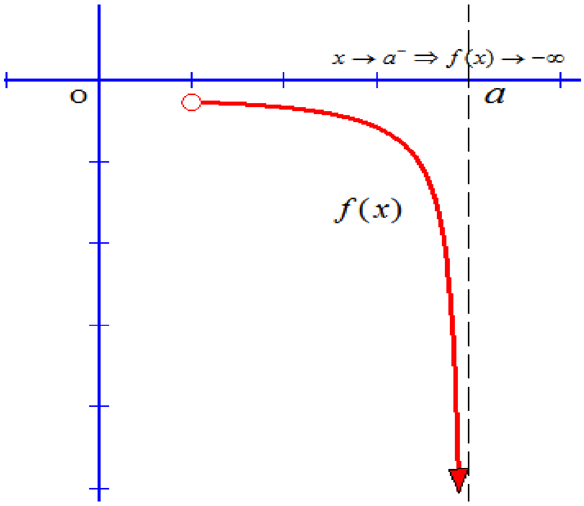
Gráficamente sería de esta manera:



- Si x tiende a “ a ” por la izquierda y entonces $f(x)$ tiende a menos infinito.
  Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to a^{-} \Rightarrow f(x) \to -\infty$

Diremos que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* por la izquierda de la función $y = f(x)$ hacia $-\infty$

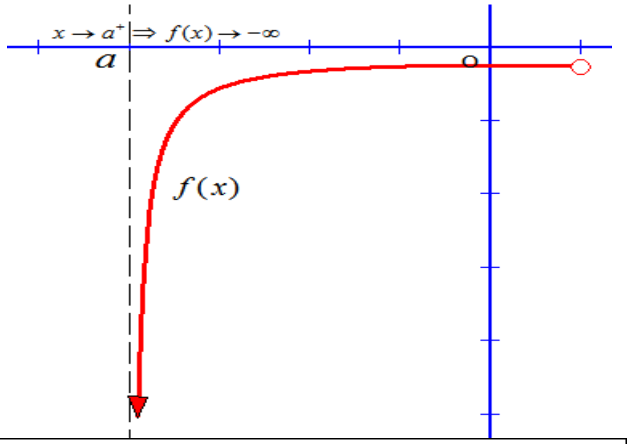
Gráficamente sería de esta manera:



- Si x tiende a “ a ” por la derecha y entonces $f(x)$ tiende a menos infinito.
  Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to a^{+} \Rightarrow f(x) \to -\infty$

Diremos que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* por la derecha de la función $y = f(x)$ hacia $-\infty$

Gráficamente sería de esta manera:



TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN HACIA $\pm\infty$ CUANDO x TIENDE A $\pm\infty$

Una función tiende a más o menos infinito cuando x tiende a más o menos infinito cuando a al hacerse la variable independiente “ x ” muy grande, en valor absoluto, también se hace muy grande la variable dependiente “ y ”, en valor absoluto. En estos casos, se dice que la función no tiene un comportamiento asintótico.

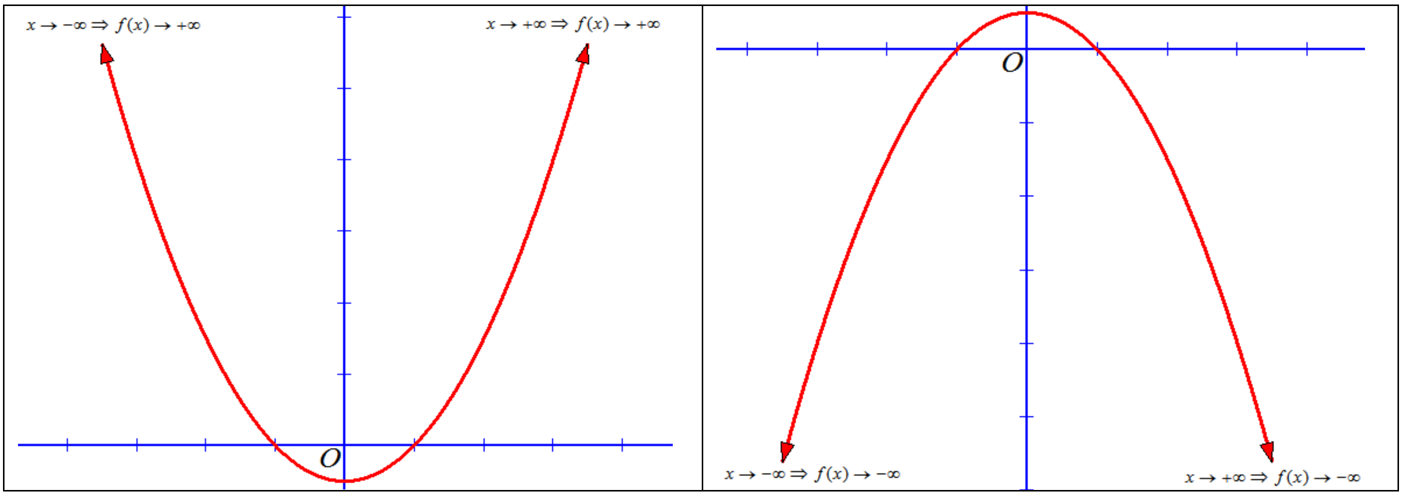
Tenemos cuatro casos que los representamos matemáticamente como sigue:

- $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

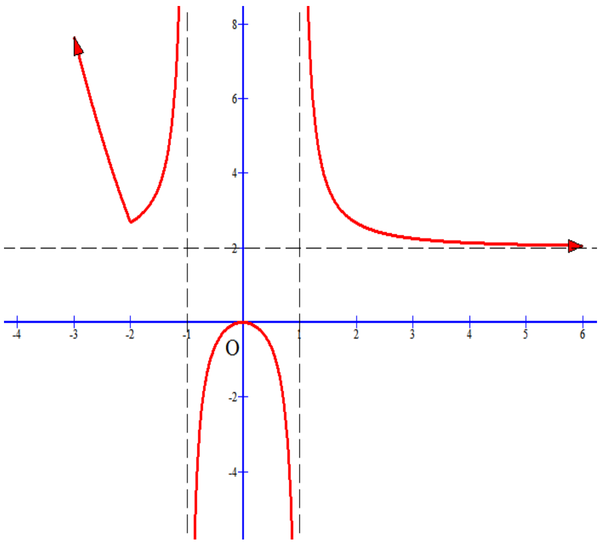
© ManoloMat

- $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

Gráficamente sería asi:



<u>Ejemplo</u>: Determinar el comportamiento tendencial o asintótico de la función $y = f(x)$ cuya gráfica es la dada:



Vamos a ir recorriendo la gráfica de izquierda ($-\infty$) a derecha ($+\infty$)

- En $-\infty$, la función se va a $+\infty$, y no tiene asíntota, es decir, $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -1^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la izquierda hacia $+\infty$ que es la recta $x = -1$
- Si $x \to -1^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la derecha hacia $-\infty$ que es la recta $x = -1$
- Si $x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la izquierda hacia $-\infty$ que es la recta $x = 1$
- Si $x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la derecha hacia $+\infty$ que es la recta $x = 1$
- En $+\infty$, la función se aproxima a 2, es decir, $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 2$. Por tanto, la función tiene una asíntota horizontal en $+\infty$, que es la recta $y = 2$

9. OPERACIONES CON FUNCIONES. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

<u>Operaciones con funciones</u>

Análogamente a las operaciones con números reales se pueden definir la suma, resta, producto y cociente de funciones. Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, se definen las siguientes operaciones:

- Suma o resta de funciones: $(f \pm g)(x) = f(x) + g(x)$
- Producto de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

- Cociente de funciones: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Composición de funciones

Definición: Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que $\mathrm{Im}(f) \subseteq Dom(g)$, se llama *función compuesta* de la función *f* con *g* (o *f* compuesta con *g*) a: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Es decir, aplicamos *g* al resultado de aplicar *f* a la variable independiente "*x*"

No es conmutativo, es decir, normalmente $g \circ f \neq f \circ g$

Ejemplo: Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\sqrt{x}\right] = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}-1} = \frac{x}{2\sqrt{x}-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{x^2}{2x-1}\right] = \sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}$$

Ejemplo: Sean $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ y $g(x) = 2x+1$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{x}{x-1}\right] = 2\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{2x+x-1}{x-1} = \frac{3x-1}{x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2x+1] = \frac{2x+1}{(2x+1)-1} = \frac{2x+1}{2x}$$

10. FUNCIÓN INVERSA

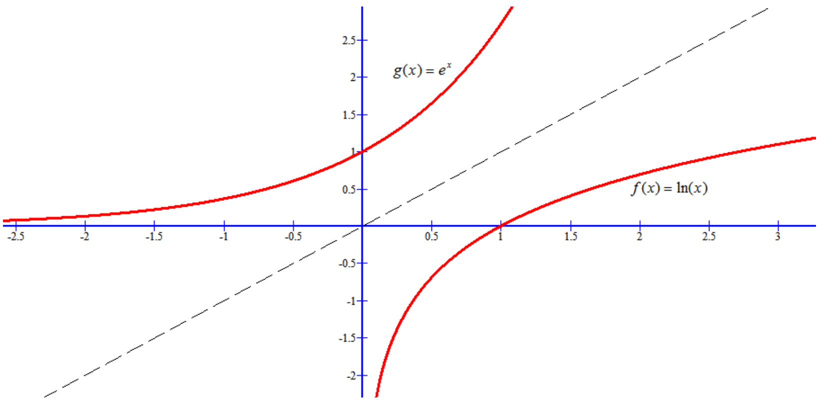
Dada una función $y = f(x)$, la *función inversa* de f es aquella que devuelve cada valor imagen a su original y se nota por $f^{-1}(x)$

Se tiene que cumplir que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Además, las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante (recuerdo que esta bisectriz tiene por ecuación $y = x$)

Ejemplo: Las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = e^x$ son inversas pues se tiene que $(f \circ g)(x) = (f)(g(x)) = f(e^x) = \ln(e^x) = x$.

Las gráficas de estas funciones son las siguientes y vemos su simetría:



© *ManoloMat*

__Ejemplo__: Calcular la inversa de la función $f(x)=2x+5$

Partimos de $y=2x+5$ →permutamos la "*x*" y la "*y*", nos queda $x=2y+5$ →despejamos "*y*" → $x-5=2y$ → $y=\frac{x-5}{2}$ → $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

Y ya tenemos que $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

__Comprobación__: Vamos a calcular $(f\circ f^{-1})(x)$ para ver que nos da la función identidad

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left[\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right]=2\cdot(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2})+5=x-5+5=x$$

Lo mismo se puede hacer con $f^{-1}\circ f$

__Ejemplo__: Calcular la inversa de $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$

Partimos de $y=\frac{3x}{2x-1}$ →permutamos la "*x*" y la "*y*", nos queda $x=\frac{3y}{2y-1}$ →despejamos "*y*" → $x\cdot(2y-1)=3y$ → $2xy-x=3y$ → $2xy-3y=x$ →sacamos factor común "y"→ $y\cdot(2x-3)=x$ → $y=\frac{x}{2x-3}$

Y ya tenemos que $f^{-1}(x)=\frac{x}{2x-3}$

__Comprobación__: Vamos a calcular $(f\circ f^{-1})(x)$ para ver que nos da la función identidad

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left[\frac{x}{2x-3}\right]=\frac{3\frac{x}{2x-3}}{2\frac{x}{2x-3}-1}=\frac{\frac{3x}{2x-3}}{\frac{2x-2x+3}{2x-3}}=\frac{\frac{3x}{2x-3}}{\frac{3}{2x-3}}=\frac{3x}{3}=x$$

Lo mismo se puede hacer con $f^{-1}\circ f$

11. FUNCIONES AFINES Y LINEALES

Son funciones cuya gráfica es una recta (como ya vimos en geometría). De manera general son de la forma $f(x)=mx+n$ ó $y=mx+n$. Ya sabemos por Geometría que:

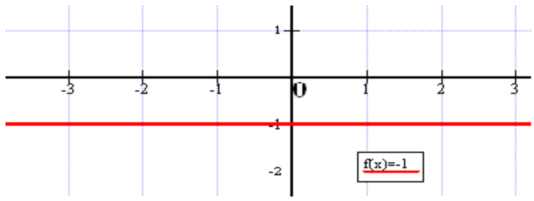
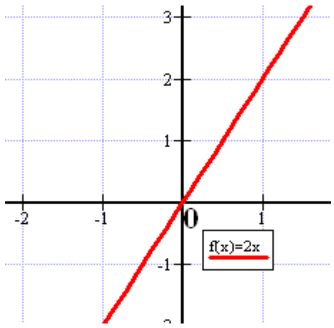
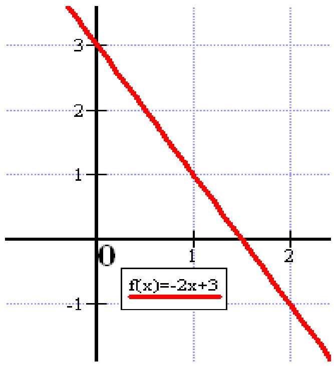
m : pendiente de la recta, que es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta con el eje OX positivo, $m=tg\alpha$

n : ordenada en el origen. La recta pasa por el punto $(0,n)$

Para representarlas gráficamente es suficiente con una tabla de valores.

© ManoloMat

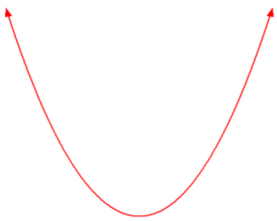
En la siguiente tabla se representan los diferentes tipos:

Tipo	**Ejemplo**	**Gráfica**
Constantes $f(x)=k$ Su gráfica es una recta horizontal $m=0$	$y=-1$ Dom(y) = R Im(y) = {-1}	
Lineales $f(x)=mx$ Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas $n=0$	$f(x)=2x$ Dom(f) = R Im(f) = R	
Afines $f(x)=mx+n$ Su gráfica es una recta inclinada $m\neq 0$ y $n\neq 0$	$f(x)=-2x+3$ Dom(f) = R Im(f) = R	

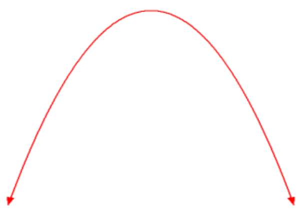
12. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son funciones en las cuales su criterio es un polinomio de 2º grado, es decir, de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su gráfica es una parábola, que es una figura como la siguiente:



ó



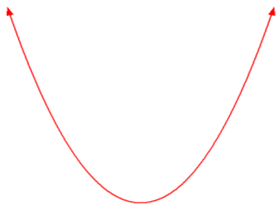
Para dibujarlas no es suficiente con una tabla de valores, sino que es necesario calcularle las siguientes propiedades, que las obtenemos a partir de su criterio $f(x)=ax^2+bx+c$:

a) Estudio de la curvatura u orientación

Lo calculamos a partir del signo del coeficiente a

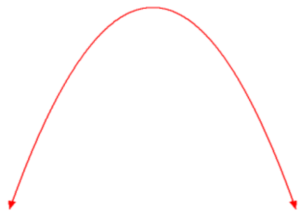
© ManoloMat

$a > 0$



ó

$a < 0$



Se dice que la parábola es CONVEXA

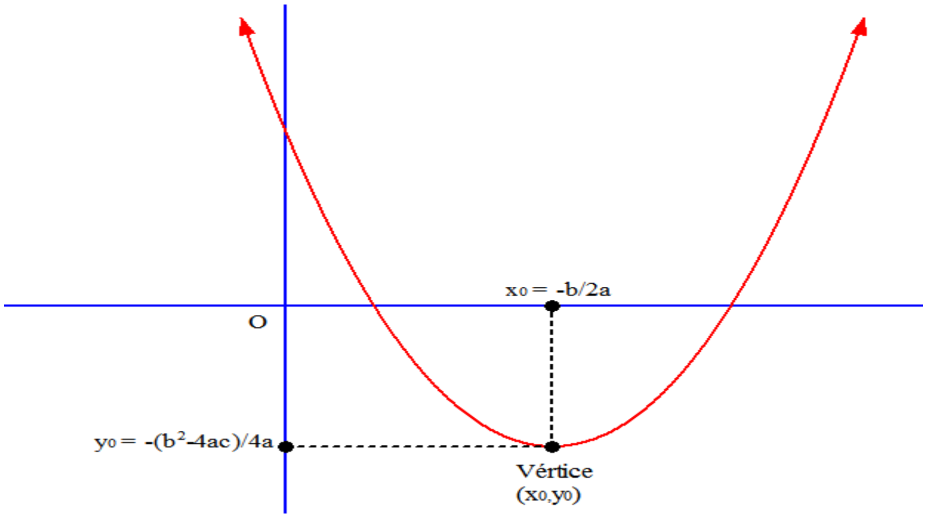
Se dice que la parábola es CÓNCAVA

b) Cálculo del vértice

El vértice es el punto máximo o mínimo de la función cuadrática (máximo cuando $a < 0$ y mínimo cuando $a > 0$)

El vértice V tiene por abscisa $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$, y su ordenada y_0 se obtiene de la ecuación, resultando, para quien quiera saberlo de memoria $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$.

En la figura se representa el vértice de una parábola con $a > 0$ (es un mínimo absoluto)



c) Puntos de corte con eje OX

Se trata de calcular los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas, por ello tenemos que resolver el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$, que nos lleva a la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$, en la cual puede ocurrir que:

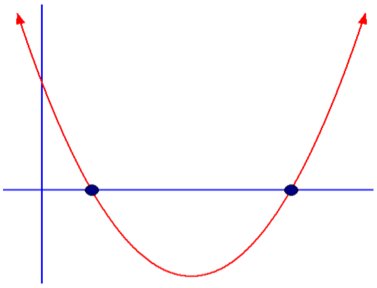
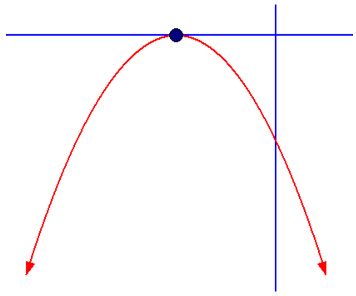
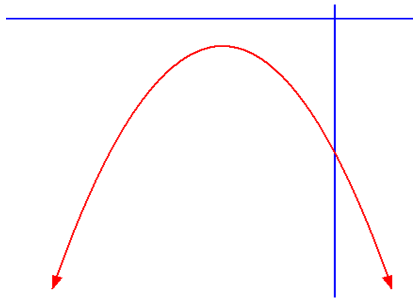
- *Tenga dos soluciones*: Hay dos puntos de corte con el eje OX

- *Tenga una única solución*: Hay un único punto de corte, la parábola es tangente al eje OX

- *No tenga ninguna solución*: No hay corte con el eje OX

Gráficamente, sería así:

© ManoloMat

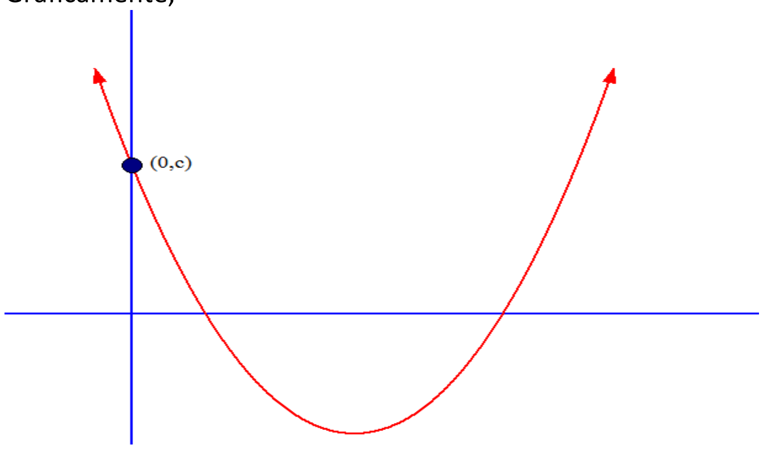
Dos puntos de corte	Un punto de corte	Ningún punto de corte
		

d) ***Punto de corte con eje OY***

Se trata de calcular el punto de corte con el eje de ordenadas, que lo calculamos resolviendo el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$, que es trivial de resolver y nos resulta $\begin{cases} y = c \\ x = 0 \end{cases}$. Por tanto, siempre es el punto $(0, c)$

Gráficamente,

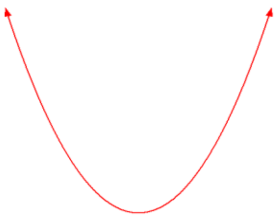


e) ***Tabla de valores***

Poco que explicar en este punto, sólo que es conveniente darle valores próximos a la abscisa del vértice para que no nos salgan valores muy elevados

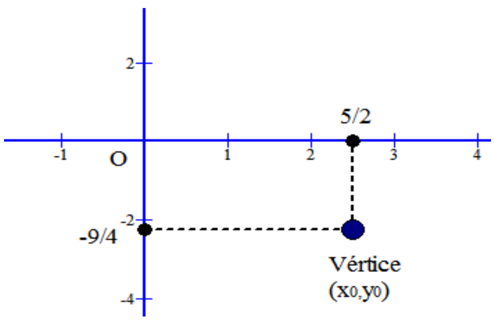
<u>Ejemplo</u>: Realizar la representación gráfica de la parábola $y = x^2 - 5x + 4$

<u>Curvatura</u>: Como $a = 1 > 0$, tenemos que la parábola es convexa



<u>Vértice</u>: $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-5)}{2 \cdot 1} = \dfrac{5}{2}$ Calculamos el correspondiente $y_0 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \dfrac{5}{2} + 4 = \dfrac{25}{4} - \dfrac{25}{2} + 4 = \dfrac{-9}{4}$ (sustituyendo en la fórmula o criterio de la función)

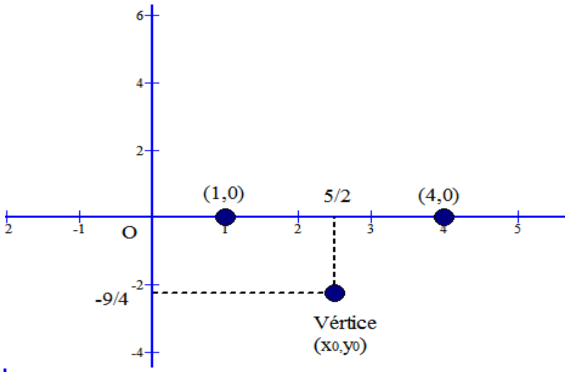
El vértice es $V\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{-9}{4}\right)$



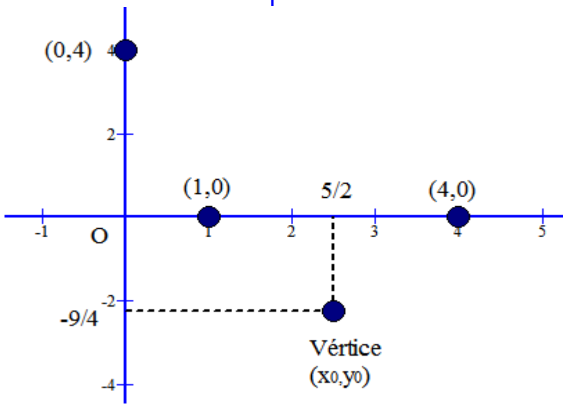
© ManoloMat

<u>Cortes eje OX</u>: Resolvemos $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$ Por tanto, los puntos de corte son: $(1,0)$ y $(4,0)$

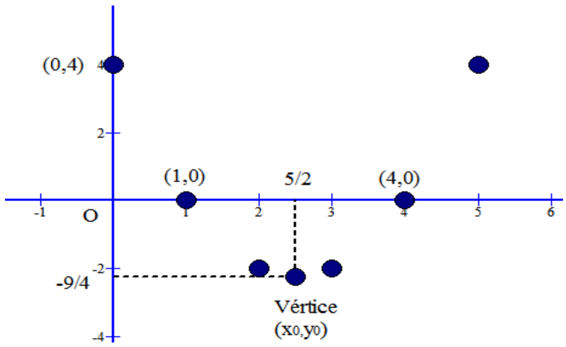


<u>Corte eje OY</u>: Como sabemos el punto es $(0,c) = (0,4)$

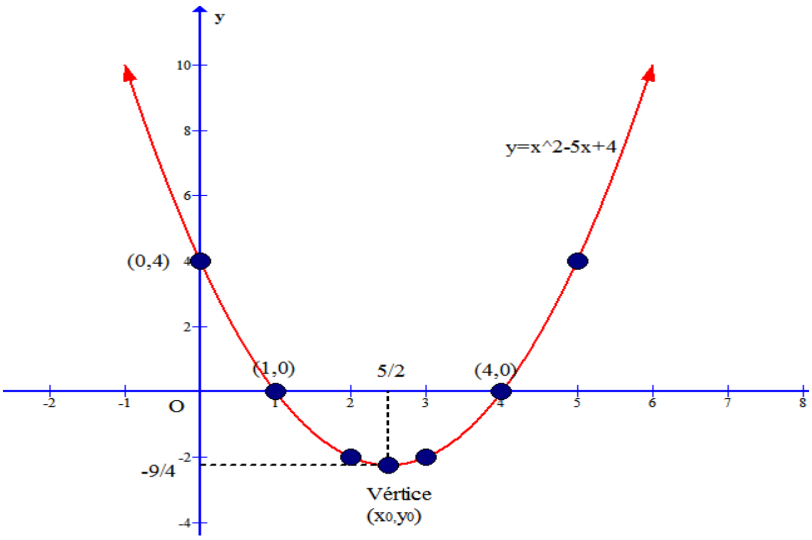


<u>Tabla de valores</u>: En este caso damos pocos valores, pues tenemos suficiente información para dibujarla ya:

x	2	3	5
y	-2	-2	4



Ya procedemos al dibujarla y nos resulta:



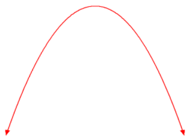
Además, como ya tenemos la gráfica:

$$\operatorname{Re}corr(f) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$$

© ManoloMat

Ejemplo: Lo mismo para la función $y = -2x^2 - 1$

Concavidad: Como $a = -2 < 0$, es cóncava



Vértice: $x_0 = \dfrac{-0}{2\cdot(-2)} = 0 \rightarrow y_0 = -1$

Luego $V(0,-1)$

Corte eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$

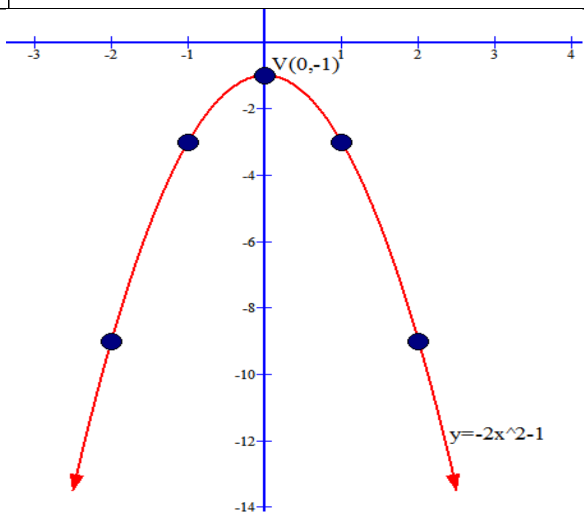
$-2x^2 - 1 = 0 \rightarrow$ No existen soluciones, no hay cortes

Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0,c) = (0,-1)$. Coincide con el vértice

Tabla de valores:

x	1	-1	2	-2	3	-3
y	-3	-3	-9	-9	-19	-19

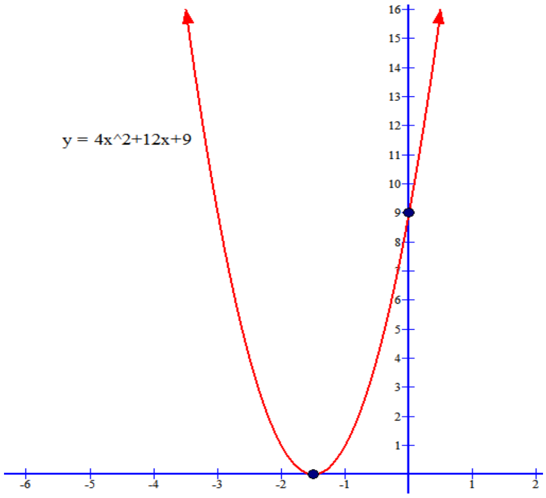
Con los datos anteriores nos debe salir la siguiente gráfica:



Además, como ya tenemos la gráfica:
$\text{Im}(f) = (-\infty, -1]$

Ejemplo: Ídem para $y = 4x^2 + 12x + 9$

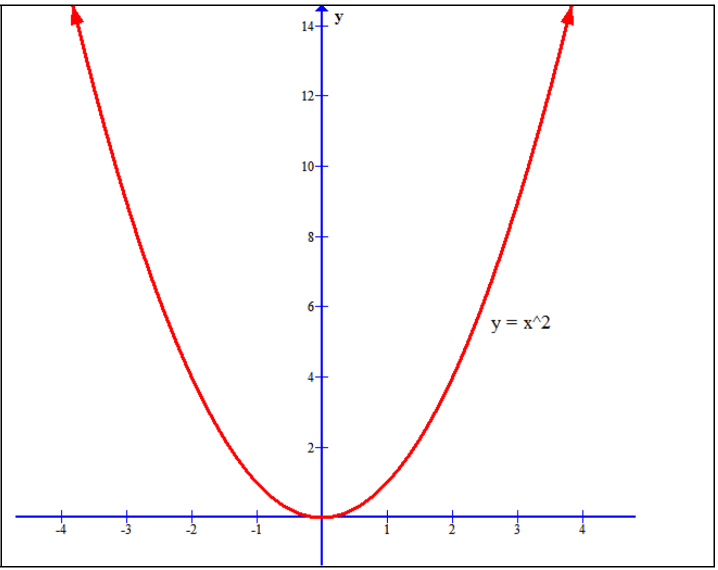
Este ejemplo os lo dejo a vosotros el estudio detallado, pero resulta que es convexa, tiene vértice en $\left(\dfrac{-3}{2}, 0\right)$, que coincide con el único punto de corte con OX y el punto de corte con OY es $(0,9)$. La gráfica es:



Además, como ya tenemos la gráfica:
$\text{Recorr}(f) = [0, +\infty)$

© ManoloMat

NOTA: Hay una parábola especial conocida como parábola canónica que es $f(x) = x^2$, que es la más simple de todas ellas y la más fácil de representar y se suele usar muy a menudo. La gráfica es la siguiente:

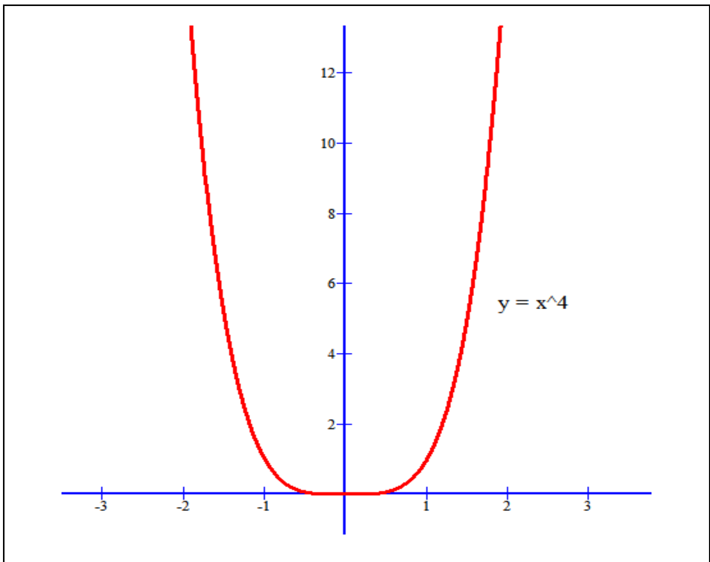


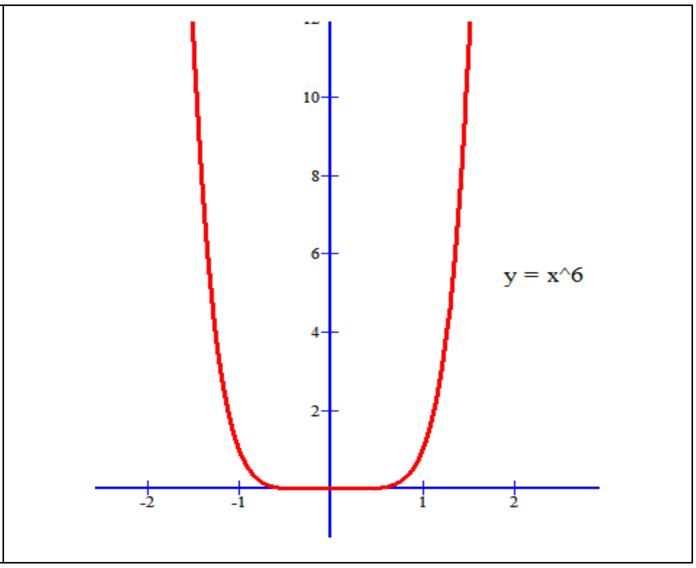
13. FUNCIONES POTENCIALES DE EXPONENTE NATURAL

a) Funciones potenciales de exponente natural par

Son funciones de la forma $f(x) = x^n$ donde $n \in N$ y es par, por ejemplo como $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, etc.

Su dominio es todo R al ser polinómicas y su gráfica es muy parecida a la de una parábola. Aquí tenéis la gráfica de dos de ellas:





Presentan simetría par (simétricas respecto del eje de ordenadas) $f(x) = f(-x)$

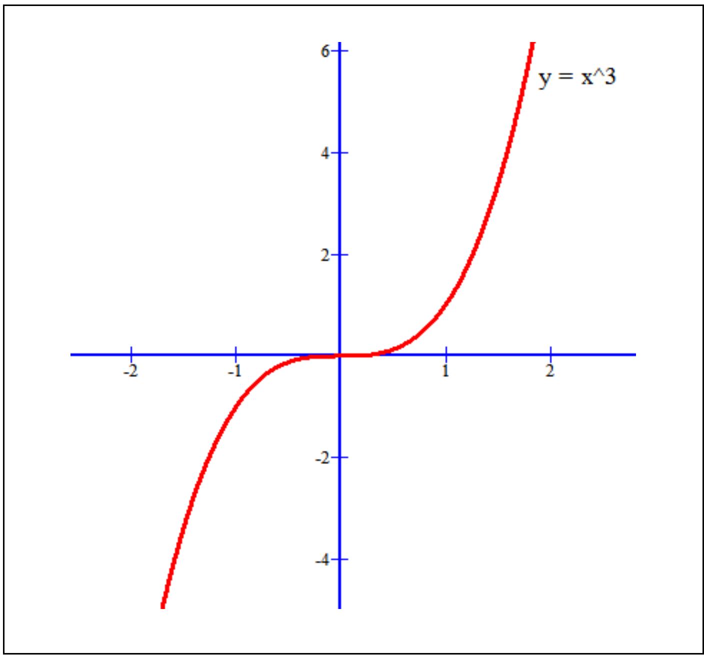
Están acotadas inferiormente. Su imagen es $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

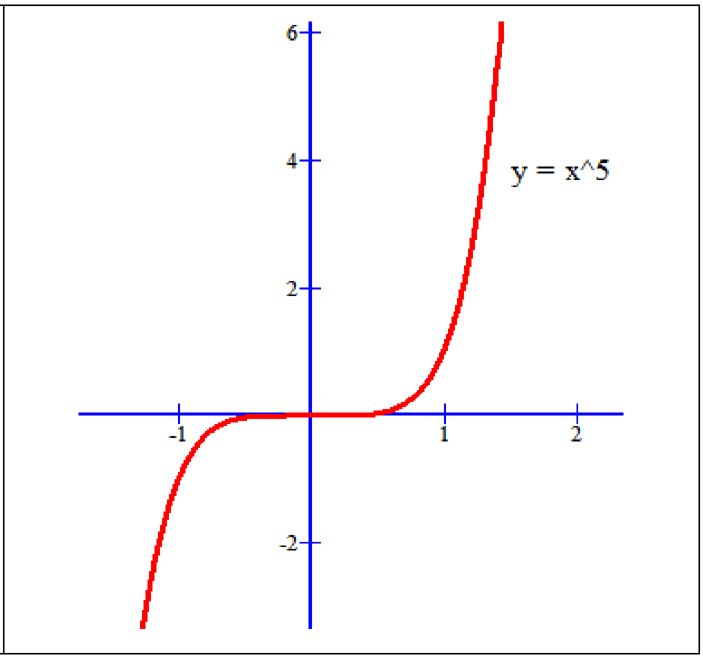
b) Funciones potenciales de exponente natural impar

Son funciones de la forma $f(x) = x^n$ donde $n \in N$ y es impar, por ejemplo como $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, etc.

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ al ser polinómicas. Aquí tenéis la gráfica de dos de ellas:

© ManoloMat





Presentan simetría impar (simétricas respecto del origen de coordenadas) $f(x) = -f(-x)$

No están acotadas. Su imagen es todo R

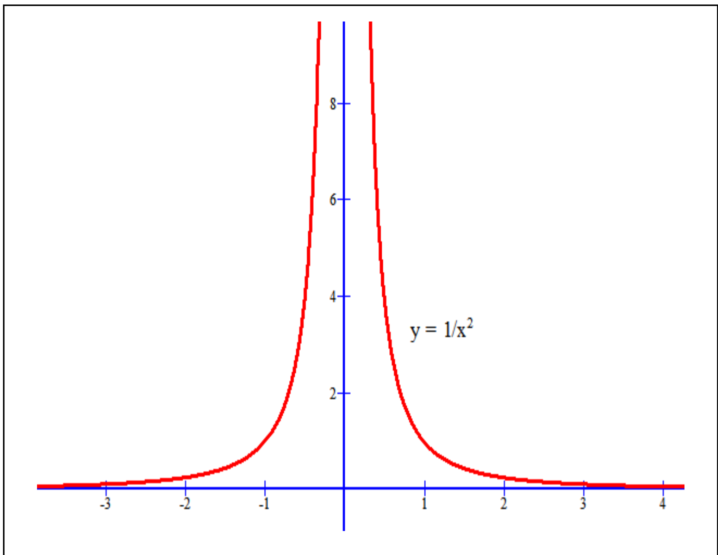
14. FUNCIONES POTENCIALES DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

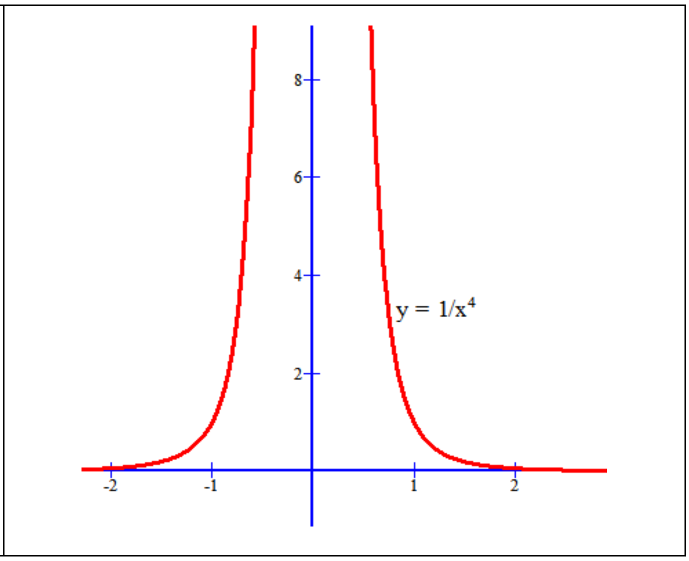
a) <u>Funciones potenciales de exponente entero negativo y par</u>

Son funciones de la forma $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ donde $n \in N$ y es par, por ejemplo como $y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$, etc.

Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Como ejemplo de sus gráficas son:





Presentan simetría par (simétricas respecto del eje de ordenadas) $f(x) = f(-x)$

Están acotadas inferiormente. Su imagen es $\mathrm{Im} = (0,+\infty)$

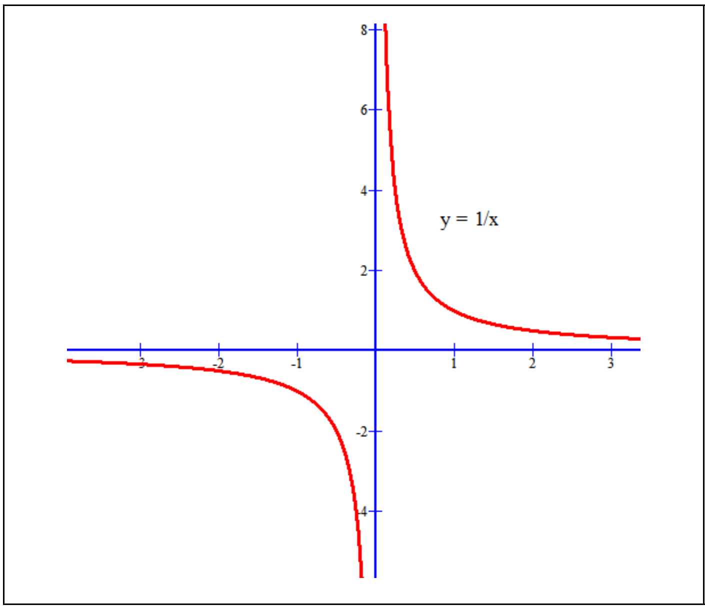
© ManoloMat

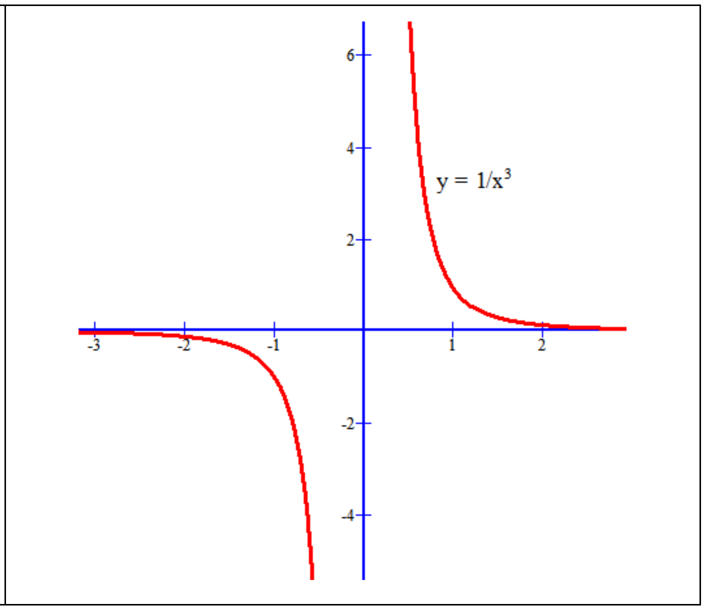
b) <u>Funciones potenciales de exponente entero negativo e impar</u>

Son funciones de la forma $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ donde $n \in N$ y es impar, por ejemplo como $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, $y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$, etc.

Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Como ejemplo de sus gráficas son:





Presentan simetría impar (simétricas respecto del origen de coordenadas) $f(x) = -f(-x)$

No están acotadas. Su imagen es $\mathbb{R} - \{0\}$

El caso particular $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es una hipérbola equilátera

15. FUNCIONES EXPONENCIALES

Son funciones de la forma $f(x) = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y van a estar acotadas inferiormente

Todas pasan por el punto $(0,1)$

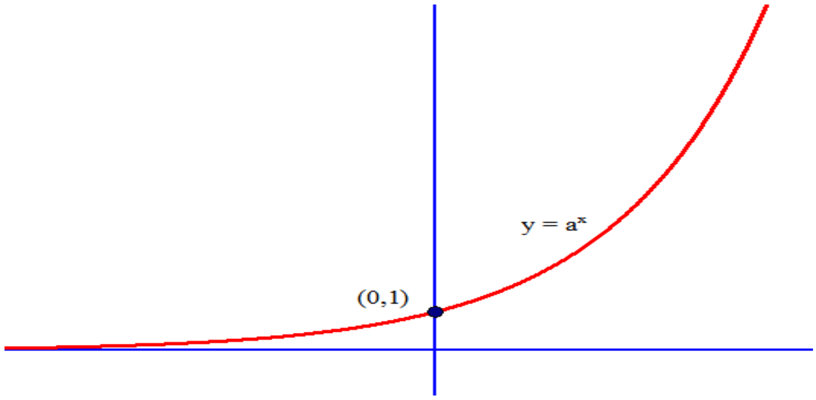
Su imagen es $\mathrm{Im}(a^x) = (0, +\infty)$

Vamos a distinguir dos casos:

a) <u>La base</u> a <u>mayor que 1</u> $(a > 1)$

En este caso son funciones crecientes y su gráfica es como sigue:

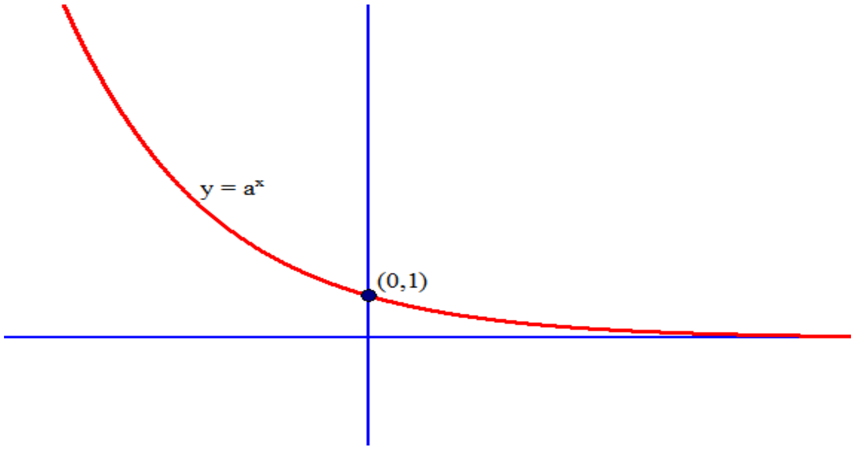
© ManoloMat



Como ejemplo, podéis dibujar la exponencial $y = 2^x$, que os saldrá similar a la anterior

b) <u>La base</u> a <u>entre 0 y 1</u> $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones decrecientes y su gráfica es como sigue:



Como ejemplo, podéis dibujar la exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$, que os saldrá similar a la anterior

16. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Como sabemos el argumento ha de ser estrictamente positivo, por tanto $Dom(\log_a) = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$

Todas pasan por el punto $(1,0)$

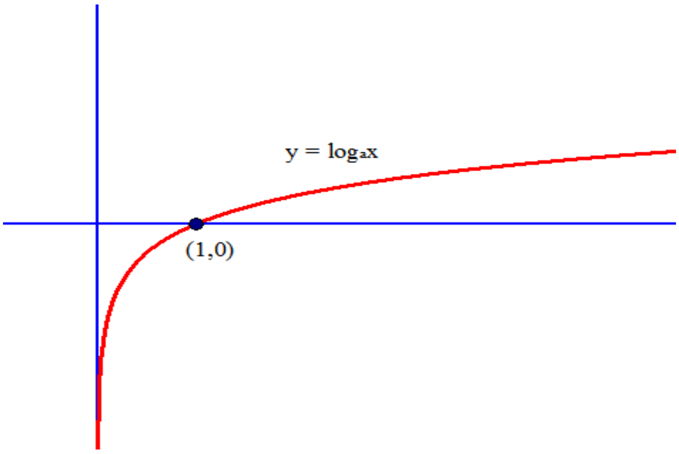
Su imagen es todo $\mathbb{R}$

Vamos a distinguir dos casos:

a) <u>La base</u> a <u>mayor que 1</u> $(a > 1)$

En este caso son funciones crecientes y su gráfica es como sigue:

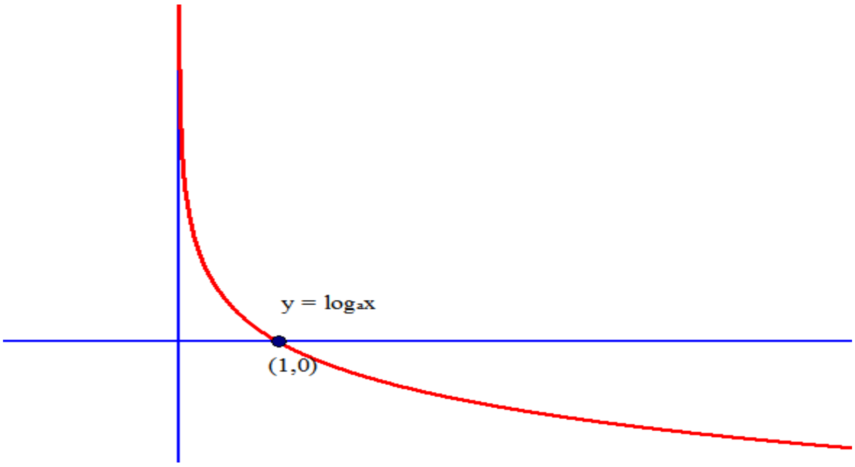
© ManoloMat



Como ejemplo, podéis dibujar las logarítmicas $y = \log_2 x$ ó $y = \ln(x)$, que os saldrá similar a la anterior

b) La base a entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones decrecientes y su gráfica es como sigue:



Como ejemplo, podéis dibujar la logarítmica $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ que os saldrá similar a la anterior

17. FUNCIONES CIRCULARES Y SUS INVERSAS

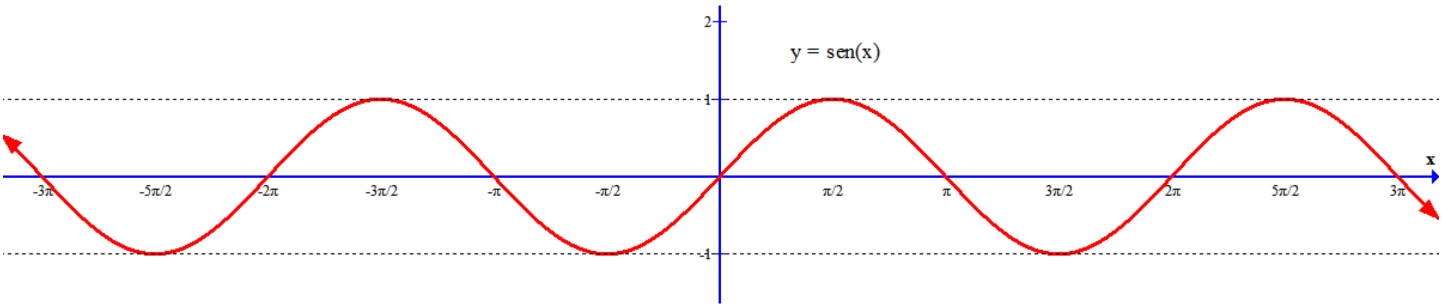
a) Función seno

Se trata de la función $f(x) = sen(x)$, cuyo dominio es todo R

Tiene simetría impar y es periódica de periodo 2π

Su imagen es: $\mathrm{Im}(sen) = [-1,1]$

Su gráfica es:



© ManoloMat

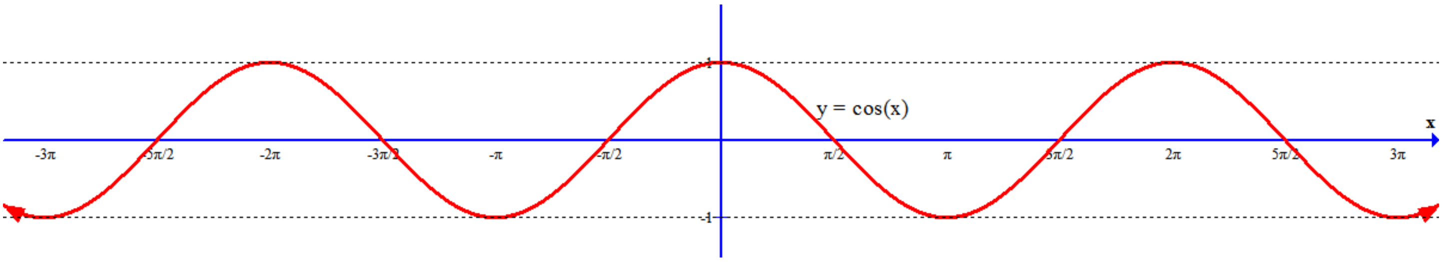
b) <u>Función coseno</u>

Se trata de la función $f(x)=\cos(x)$, cuyo dominio es todo R

Tiene simetría par y es periódica de periodo 2π

Su imagen es: $\mathrm{Im}(\cos)=[-1,1]$

Su gráfica es:



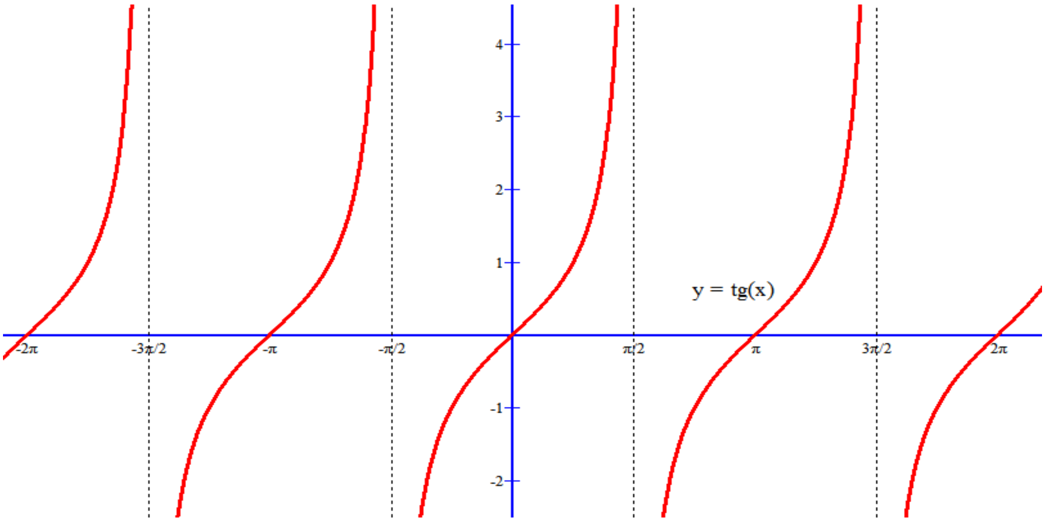
c) <u>Función tangente</u>

Se trata de la función $f(x)=tg(x)$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$ salvo los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$

Matemáticamente se escribe así: $Dom(tg)=\mathbb{R}-\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2},,k\in Z\right\}$

Tiene simetría impar y es periódica de periodo π

Su gráfica es:



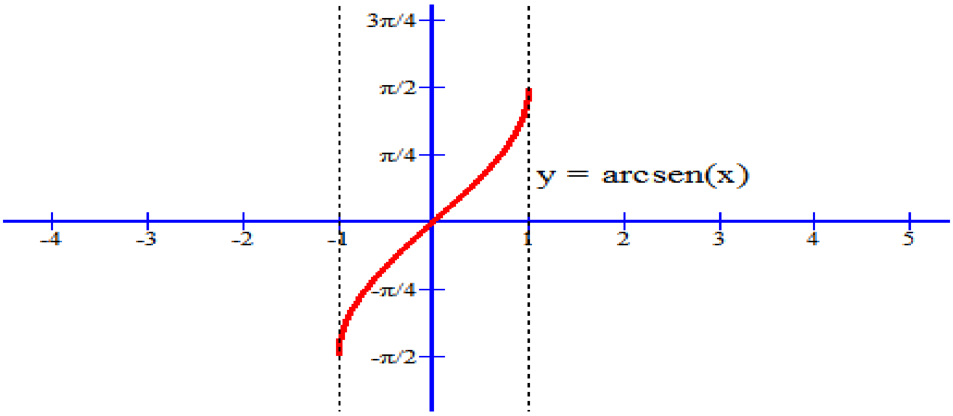
Su imagen es todo R: $\mathrm{Im}(tg)=\mathbb{R}$

d) <u>Función arco seno</u>

La función $f(x)=arcsen(x)$, devuelve el ángulo comprendido entre $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es x. Se restringe a este intervalo la imagen para que $f(x)=arcsen(x)$ se pueda considerar una función (un original, x , tiene una sola imagen)

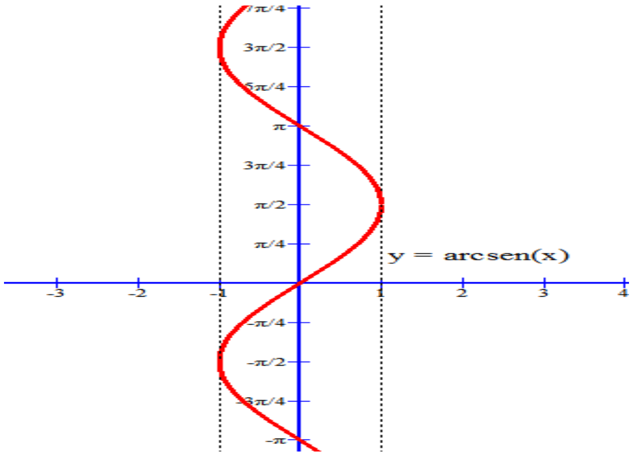
© ManoloMat

Su dominio es: $Dom(arcsen(x) = [-1{,}1]$ y su gráfica es:



Como vemos es impar y creciente.

Ahora bien, sabemos que por ejemplo $arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, si dibujásemos todas las posibilidades o soluciones ya no sería una función, pero aun así es interesante conocerla y la gráfica es como sigue:

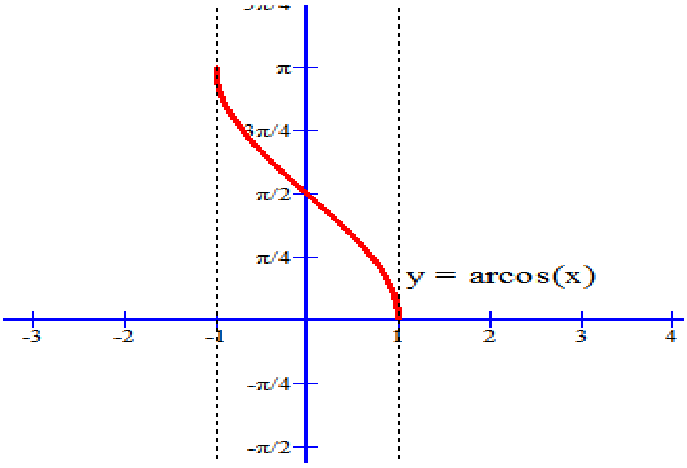


e) <u>Función arco coseno</u>

La función $f(x) = ar\cos(x)$, devuelve el ángulo comprendido entre $[0, \pi]$ cuyo coseno es x. Se restringe a este intervalo la imagen para que $f(x) = ar\cos(x)$ se pueda considerar una función (un original,x, tiene una sóla imagen)

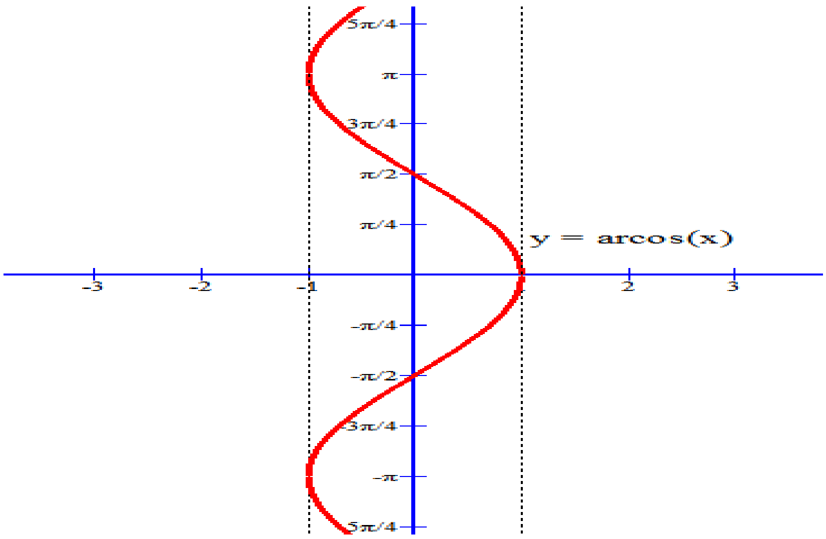
Su dominio es: $Dom(ar\cos(x) = [-1{,}1]$ y su gráfica es:

© ManoloMat



Como vemos es decreciente.

Ahora bien, sabemos que por ejemplo $ar\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, si dibujásemos todas las posibilidades o soluciones ya no sería una función, pero aun así es interesante conocerla y la gráfica es como sigue:

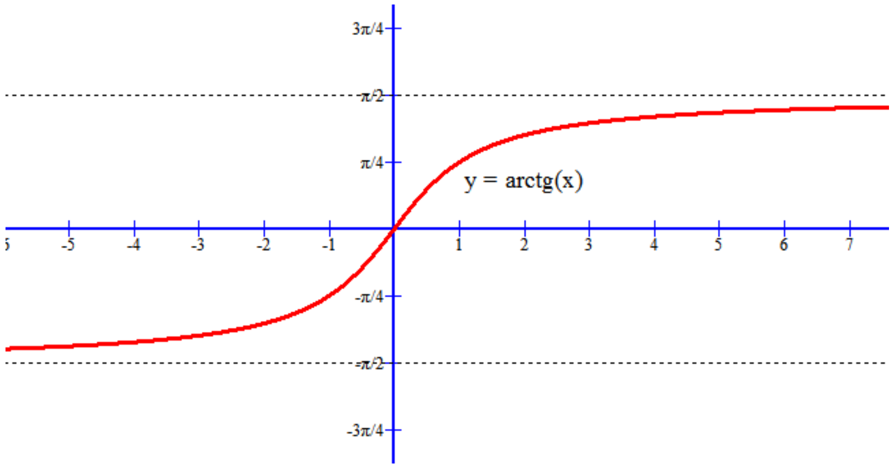


f) <u>Función arco tangente</u>

La función $f(x) = arctg(x)$, devuelve el ángulo comprendido entre $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente es x. Se restringe a este intervalo la imagen para que $f(x) = arctg(x)$ se pueda considerar una función (un original,x, tiene una sola imagen)

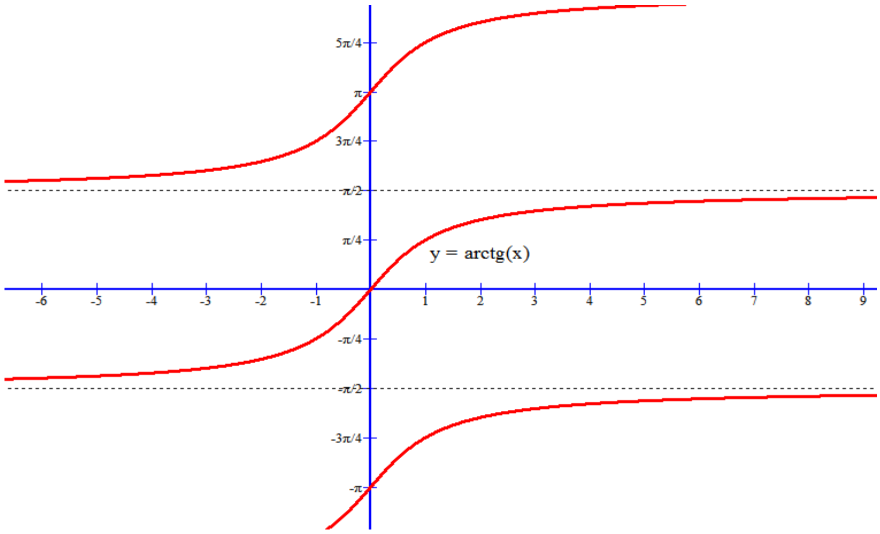
Su dominio es: $Dom(arctg(x) = \mathbb{R}$ y su gráfica es:

© ManoloMat



Como vemos es creciente.

Ahora bien, sabemos que por ejemplo $arctg(1) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, si dibujásemos todas las posibilidades o soluciones ya no sería una función, pero aun así es interesante conocerla y la gráfica es como sigue:



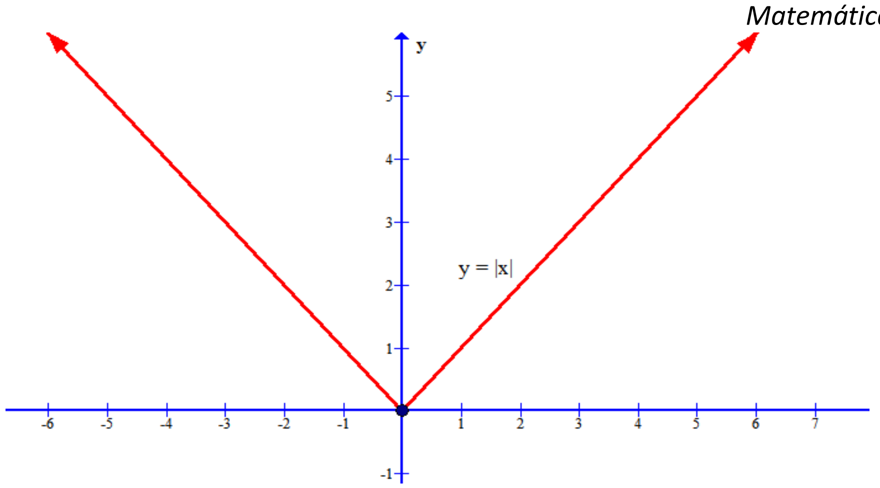
18. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función valor absoluto se define por partes de la siguiente forma: $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases}$. Es decir, es la función que toma un nº real y devuelve el nº positivo correspondiente. Ejemplos: $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-7| = 7$, $\left|\dfrac{-6}{7}\right| = \dfrac{6}{7}$

Tenemos que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

Su gráfica es la siguiente:

© *ManoloMat*



Y como vemos su imagen es $\mathrm{Im}(|x|) = [0,+\infty)$

Está acotada inferiormente pero no superiormente, teniendo un mínimo absoluto en O(0,0).

Cumple además que:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

19. FUNCIÓN PARTE ENTERA Y PARTE DECIMAL

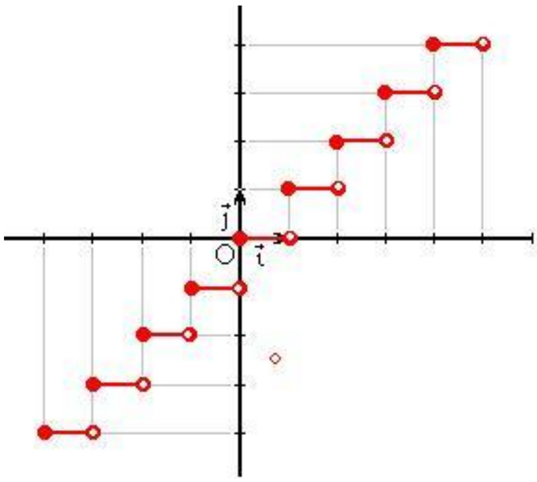
a) <u>Función parte entera</u>

Es la función $f(x) = E(x) =$ mayor de todos los enteros menores o iguales a x.

Su dominio es todo $\mathbb{R}$.

Así, unos ejemplos de valores, E(2’3) = 2, E(0’45) = 0, E(7) = 7, E(-1’3) = -2, E(-5,2) = -6, E(-8) = -8

Su representación gráfica es parecida a una escalera:



Y tenemos que Im(E(x)) = Z

b) <u>Función parte decimal</u>

Se define como $Dec(x) = x - E(x)$.

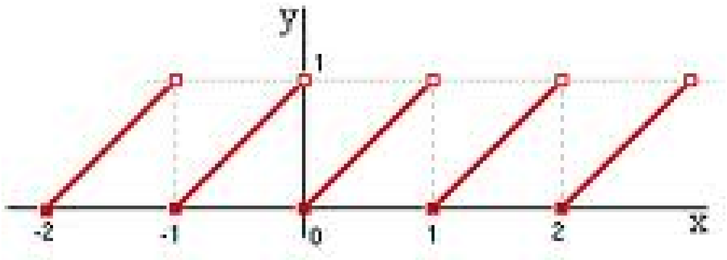
Su dominio es todo $\mathbb{R}$

© ManoloMat

Algunos ejemplos de valores:

x	2’1	8’234	5	-2	-12’34	-7’8	-9’7
Dec(x)	0’1	0’234	0	0	0’66	0’2	0’3

Su dominio es todo R y su gráfica es así:



Luego $Im\left(Dec\left(x\right)\right)=\left[0,\ 1\right)$

20. FUNCIÓNES DEFINIDAS A TROZOS O POR PARTES

Estas funciones se caracterizan porque su criterio o fórmula varía según la variable independiente “x” pertenezca a un conjunto de valores o a otro. Veamos algunos ejemplos:

<u>Ejemplo</u>: Sea $f(x)=\begin{cases}-2x^2+x+3 & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad 1\le x<3 \\ \ln x & si \quad x>3\end{cases}$ Vamos a estudiar su dominio, su representación gráfica y su imagen. Esta función también se podía poner así usando intervalos $f(x)=\begin{cases}-2x^2+x+3 & si \quad x\in(-\infty,1) \\ 2x-1 & si \quad x\in[1,3) \\ \ln x & si \quad x\in(3+\infty)\end{cases}$

Podéis usar la que más os guste, es totalmente indiferente.

Como vemos tiene 3 partes:

- Si $x<1$ (o bien, $x\in(-\infty,1)$), está definida por un polinomio de grado 2, que siempre tiene sentido, en particular en la restricción $x<1$. Tendremos un trozo de parábola

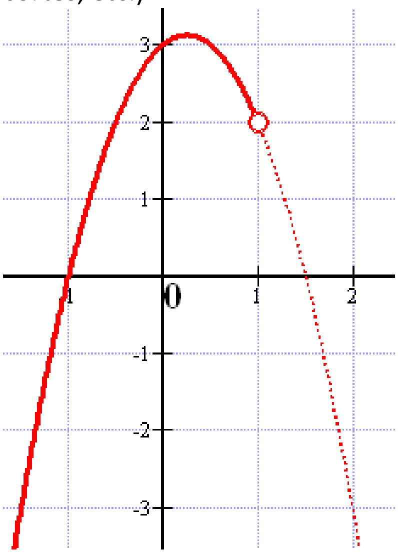
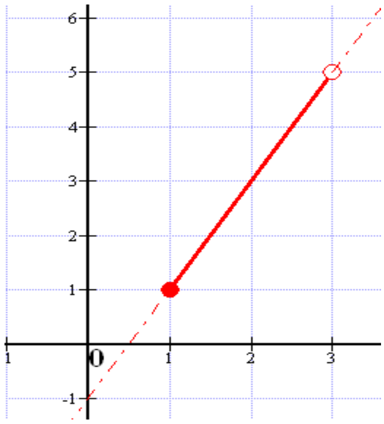
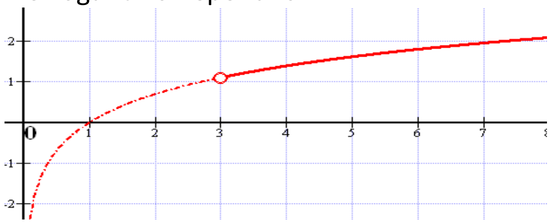
- Si $1\le x<3$, está definida por un polinomio de grado 1 (función afín), que siempre tiene sentido, y su gráfica será una recta. Tendremos un trozo de recta (una semirrecta o un segmento)

- Si $x>3$, está definida por un logaritmo neperiano que tiene sentido siempre que su argumento (en este caso la “x”) sea positivo. Como x > 3, no hay problema y tiene sentido.

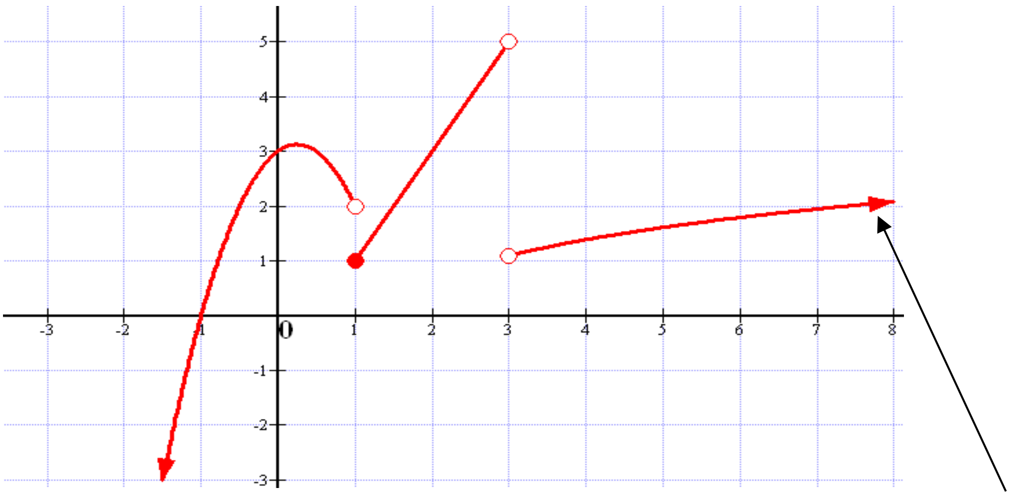
Pero hay un valor dónde la función no está definida, en x = 3. Por tanto, $Dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Pasamos a representarla gráficamente, para ello dibujamos cada parte por separado y en línea discontinua se representa la parte que habrá que borrar en el gráfico final

© ManoloMat

La parábola sería así (vosotros lo hacéis como siempre: vértice, cortes, etc.)	La recta	Y el logaritmo neperiano
		

Y todo unido y quitando las líneas punteadas, nos queda la gráfica de $f(x)$



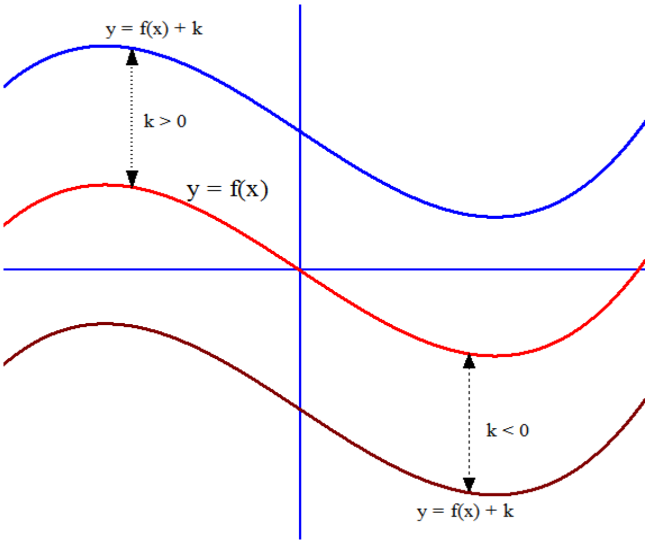
Y tenemos que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$, pues el logaritmo neperiano va creciendo (aunque lentamente) hacia el infinito

© ManoloMat

21. TRASLACIONES DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

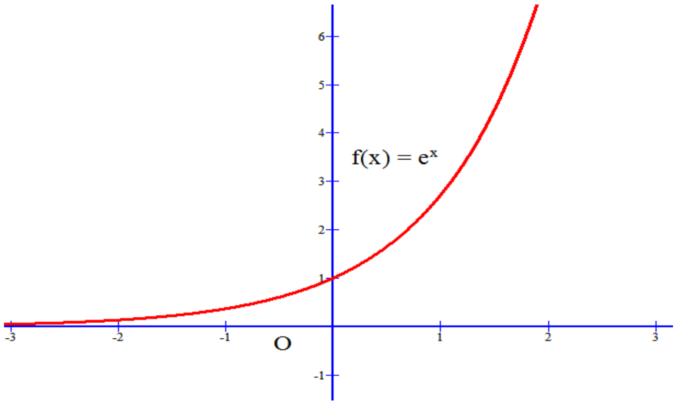
a) <u>Traslaciones verticales</u>

Dada una función del tipo $y = f(x) + k$, su gráfica se obtiene de trasladar verticalmente k unidades hacia arriba la gráfica de la función $y = f(x)$ si $k > 0$ y k unidades hacia abajo la gráfica de la función $y = f(x)$ si $k < 0$

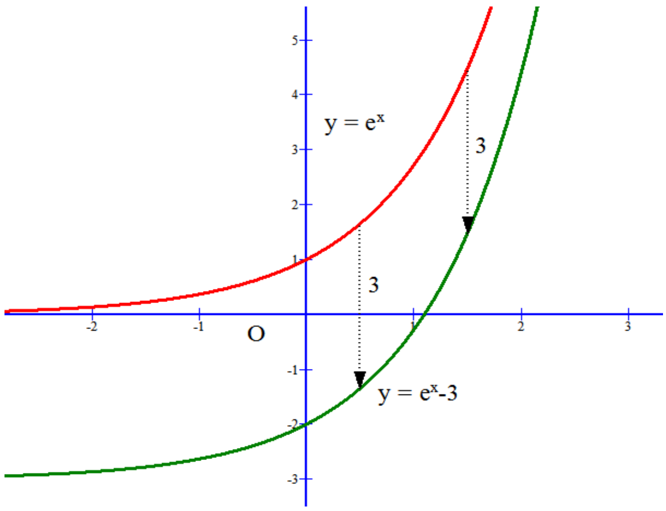


<u>Ejemplo</u>: Representa gráficamente la función $y = e^x - 3$

En primer lugar, dado que tenemos función exponencial $f(x) = e^x$ con base $e > 1$, su gráfica es como sigue:

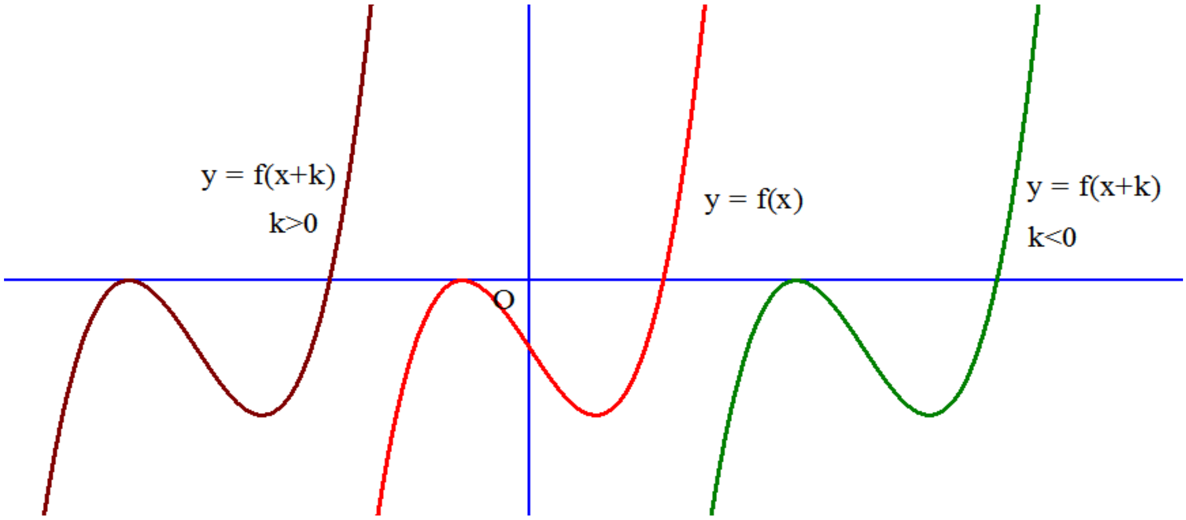


Basta desplazar la función 3 ($k = -3$) unidades hacia abajo y ya tenemos la función pedida



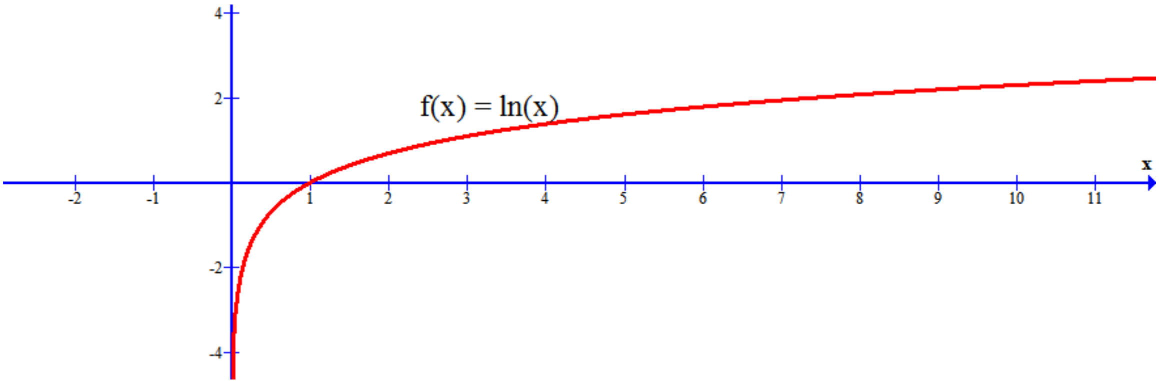
b) Traslaciones horizontales

Dada una función del tipo $y = f(x+k)$, su gráfica se obtiene de trasladar horizontalmente k unidades hacia la izquierda la gráfica de la función $y = f(x)$ si $k > 0$ y k unidades hacia la derecha la gráfica de la función $y = f(x)$ si $k < 0$

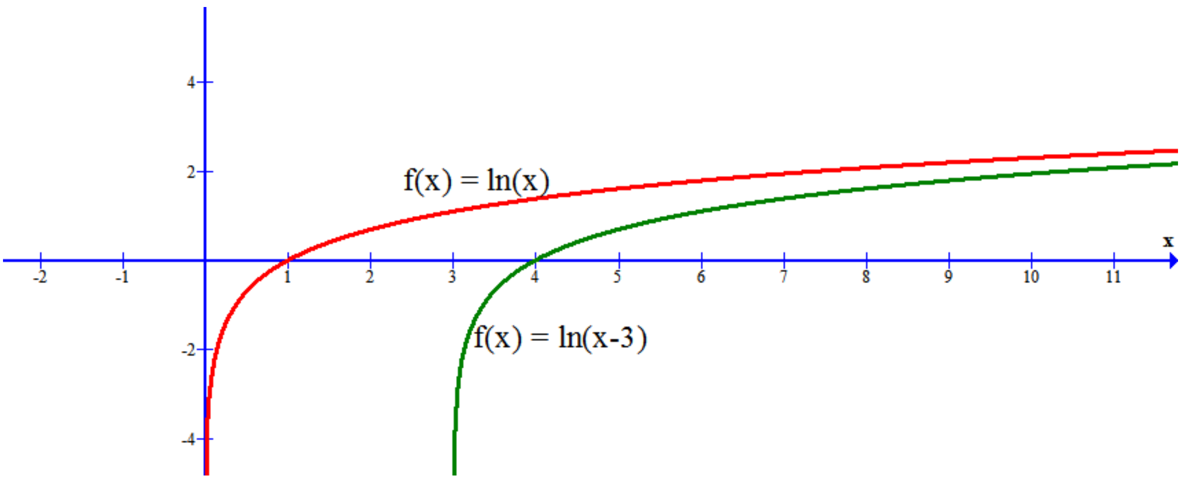


Ejemplo: Representa gráficamente la función $y = \ln(x-3)$

En primer lugar, dado que tenemos función logarítmica $f(x) = \ln(x)$ con base $e > 1$, su gráfica es como sigue:



Basta desplazar horizontalmente 3 unidades a la derecha la gráfica ($k = -3$), y ya tenemos la función pedida.



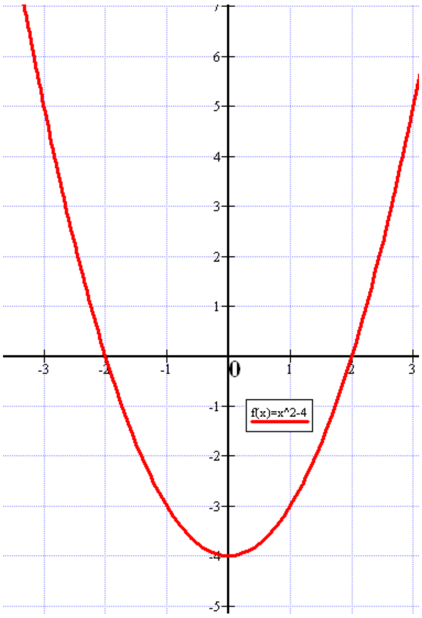
© ManoloMat

Ejemplo: Dada la función $f(x)=\left|x^2-4\right|$-3, vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su imagen.

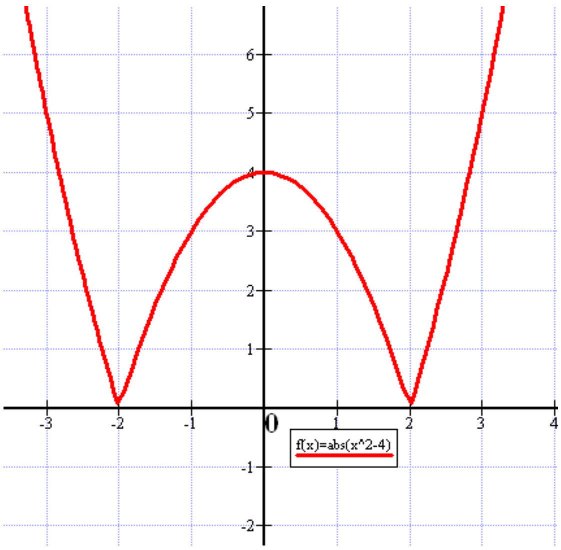
El dominio de $\left|g(x)\right|$ es igual al de $g(x)$, por lo que en nuestro caso como tenemos un polinomio cuadrático en el valor absoluto y después restamos 3, podemos concluir que $Dom(f)=\mathbb{R}$.

Vamos a representarla gráficamente mediante 3 pasos:

Paso1: Dibujamos la parábola $g(x)=x^2-4$, como sabemos, con curvatura, vértice, cortes, etc

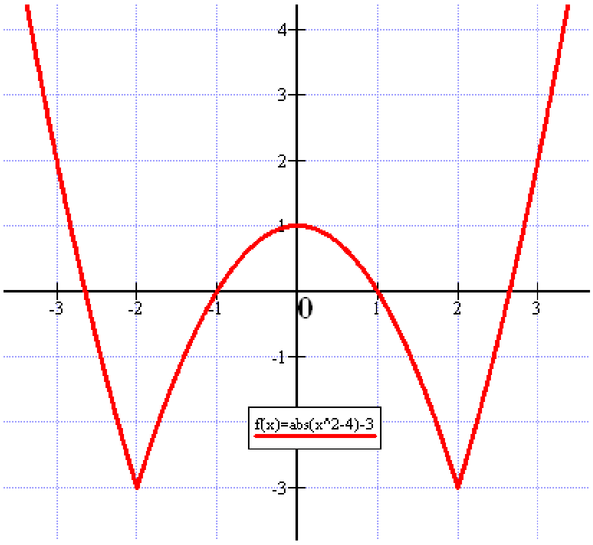


Paso 2.- El valor absoluto lo que hace es poner positivo los valores de x^2-1 que son negativos y los demás los deja igual



Paso 3.- Restamos 3 a toda la gráfica, es decir, trasladamos la representación 3 unidades hacia abajo

© ManoloMat



Ya podemos concluir que $\mathrm{Re}\,corr(f) = [-3, +\infty)$