UNIDAD 3: **ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES**

Contenido

1. ECUACIONES DE 2º GRADO. RESOLUCIÓN

Una **identidad** es una igualdad literal que se verifica para cualquier valor numérico que se dé a las letras que entran en la igualdad.

Ejemplo:

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ es una identidad

Una **ecuación** es una igualdad literal que sólo se verifica para valores específicos o determinados que se den a las letras que entran en la igualdad.

Ejemplo: $x^2 - 2 = 2$ es una ecuación.

Ejemplos: Decir si son identidades o ecuaciones las siguientes igualdades:

a) $(x-3)\cdot(x+3) = x^2 - 9$ Identidad b) $2x + 4 = 6$ Ecuación

c) $(x-3)\cdot(x+3) = x^2 + 9$ Ecuación d) $x + 1 = 3x - 7$ Ecuación

Ejemplo: (REPASO) Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $x + 2\cdot(x-1) = 4$

b) $\frac{1}{8}\cdot(x-2) - \frac{2}{3}\cdot(2x+6) + x = -4$

c) $3ax - 2x = 3a - 2$

d) $\frac{a}{x-2a} + \frac{x-2a}{a} = \frac{x}{a}$

Las **ecuaciones de 2º grado** son ecuaciones de la forma $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ donde $a \neq 0$ pues si fuera 0 sería una ecuación de primer grado.

Las soluciones se obtienen mediante la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

Al nº $(b^2 - 4\cdot a\cdot c)$ se le llama discriminante y se representa por la letra griega delta $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$. Se tiene que:

- Si $b^2 - 4\cdot a\cdot c > 0$, va a tener dos soluciones
- Si $b^2 - 4\cdot a\cdot c = 0$, va tener una sola solución que se llama *doble*
- Si $b^2 - 4\cdot a\cdot c < 0$, no va a tener soluciones pues raíces cuadradas de números negativos no existen.

Ejemplo: Resolver $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Aplicando la fórmula de las soluciones de una ecuación de 2º grado tenemos que:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

De lo anterior tenemos dos soluciones según tomemos el + ó el –

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow x_1 = 1$$
$$x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

Un estudio aparte merecen las llamadas **ecuaciones de 2º grado incompletas** que son aquellas donde el coeficiente de primer grado (b) o el término independiente (c) valen 0. Veamos cómo se resuelven.

- Si $b = 0 \Rightarrow a\cdot x^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

- Si $c = 0 \Rightarrow a\cdot x^2 + b\cdot x = 0 \Rightarrow x\cdot(a\cdot x + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$

Ejemplo: Resolver $4x^2 - 9 = 0$

Aplicando lo anterior tenemos que: $4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{matrix}$

Ejemplo: Resolver: $x^2 + 6x = 0$

Por lo anterior tenemos que, sacando factor común x:

$$x\cdot(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $2x^2 - x - 45 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{4} = \frac{1 \pm 19}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{20}{4} = 5 \\ x_2 = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2} \end{cases}$

Propiedad: Si tenemos una ecuación de 2º grado $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ cuyas soluciones son x_1 y x_2 se cumple que:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ La suma de las soluciones es b partido por a y cambiado de signo
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ El producto de las soluciones es c partido por a

Esto es muy útil cuando queremos calcular una ecuación que tenga dos determinadas soluciones y usando como $a = 1$. Por ejemplo, supongamos que queremos tener una ecuación cuyas soluciones sean $x_1 = -3$ y $x_2 = 5$. Entonces $x_1 + x_2 = -3 + 5 = 2$ y $x_1 \cdot x_2 = (-3)\cdot 5 = -15$. Con esto la ecuación de 2º grado que va a tener esas soluciones es: $x^2 - 2\cdot x - 15 = 0$

Propiedad: Las soluciones de una ecuación de 2º grado nos sirve para factorizar el polinomio de 2º grado asociado. Así si las soluciones de la ecuación de 2º grado $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ son x_1 y x_2. Entonces, como ya sabemos, podemos poner $P(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$

Ejemplo: Descomponer en factores el polinomio $P(x) = 2x^2 - x - 45$. Las soluciones son $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{-9}{2} \end{cases}$. Por tanto, nos queda factorizado como sigue $P(x) = 2x^2 - x - 45 = 2\cdot(x-5)\cdot(x + \frac{9}{2})$

2. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A 2

- *Ecuaciones bicuadradas*

Son ecuaciones de la forma $a\cdot x^{2n}+b\cdot x^{n}+c=0$ y que se pueden transformar en ecuaciones de 2º grado. Veamos con ejemplos como se resuelven.

Ejemplo: Resolver $x^4-13x^2+36=0$

Nos damos cuenta de que la ecuación se puede poner de la siguiente forma $\left[x^2\right]^2-13\left[x^2\right]+36=0$, que se puede entender como una ecuación de 2º grado en $[x^2]$, y aplicando la fórmula tenemos que:

$$x^2=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1}\rightarrow x^2=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases}9\\4\end{cases}$$ Estas son las soluciones de x^2

y para cada una de ellas resolvemos: $$\begin{cases}x^2=9\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\\x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}\end{cases}$$ Por tanto nos salen cuatro soluciones.

Ejemplo: Resolver $x^4-3x^2-4=0$. Análogamente tenemos que darnos cuenta que se puede poner como $\left[x^2\right]^2-3\left[x^2\right]-4=0$ y resolvemos

$$x^2=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}\rightarrow x^2=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}4\\-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}\\x^2=-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\Rightarrow\text{No existe}\end{cases}$$ En este caso sólo hay dos soluciones

- *Ecuaciones que pueden factorizarse*

En este tipo de ecuaciones lo que hemos de hacer es descomponer en factores y después igualar cada factor a 0 resolviendo las ecuaciones resultantes que serán de menor grado. Veamos cómo se realiza con ejemplos.

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^3+x^2-5x-5=0$

Descomponemos en factores aplicando Ruffini,

	1	1	-5	-5
-1		-1	0	5
	1	0	-5	0

Ya el cociente es de grado 2, y tenemos que $x^3+x^2-5x-5=(x+1)\cdot(x^2-5)=0$ Si el producto de factores da 0, eso implica que alguno de los factores es 0, luego tenemos que $\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\x^2-5=0\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}\end{cases}$ Nos han salido 3 soluciones de la ecuación, que son: $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=\sqrt{5}\\x_3=-\sqrt{5}\end{cases}$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

Aplicamos Ruffini para descomponer hasta que lleguemos a un polinomio de 2º grado como cociente

	1	-1	2	-4	-8
-1		-1	2	-4	8
	1	-2	4	-8	0
2		2	0	8	
	1	0	4	0	

Así nos queda, $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x+1)(x-2)(x^2+4) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-4} \Rightarrow \text{No tiene soluciones} \end{cases}$$

Luego en esta ecuación sólo hay dos soluciones $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

3. ECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas ecuaciones en las cuales la incógnita aparece bajo el signo de radical. Nos vamos a limitar a aquellas en las que aparecen radicales cuadráticos (raíces cuadradas). El proceso para resolverlas es el siguiente:

- Se deja un radical en un miembro de la ecuación y nos llevamos todos los demás al otro miembro
- Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación
- Si existe todavía algún radical, se repite el proceso anterior
- Se resuelve la ecuación resultante y es obligatorio comprobar que las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación inicial, pues al elevar al cuadrado una ecuación pueden generarse otras soluciones.

Ejemplo: Resolver $x - \sqrt{x} = 6$

Aislamos el radical: $x - 6 = \sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado: $(x-6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

Resolvemos la ecuación de 2º grado: $x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Comprobamos las soluciones sustituyendo en la ecuación inicial: $\begin{cases} x_1 = 9 \Rightarrow 9 - \sqrt{9} = 6 \text{ Es cierto o válido} \\ x_2 = 4 \Rightarrow 4 - \sqrt{4} = 6 \text{ No es cierto o no válido} \end{cases}$

En este caso sólo hay una solución $x_1 = 9$

Ejemplo: Resolver $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1$

Aislamos el radical: $\sqrt{x}=1+\sqrt{x-3}$

Elevamos al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(1+\sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow x=1+2\sqrt{x-3}+\left(\sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow x==1+2\sqrt{x-3}+x-3 \Rightarrow 0=-2+2\sqrt{x-3}$$

Aislamos nuevamente el radical: $2=2\sqrt{x-3}$ →(simplificamos) $1=\sqrt{x-3}$

Elevamos al cuadrado de nuevo: $1^2=\left(\sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow 1=x-3 \Rightarrow x=4$

Comprobamos la solución: $x=4 \Rightarrow \sqrt{4}-\sqrt{4-3}=1 \Rightarrow 2-1=1$ Es una solución válida

4. SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO

Un sistema de ecuaciones es de 2º grado cuando alguna de las incógnitas es de 2º grado

Para resolverlos tenemos dos métodos

- *Método de sustitución*: Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra la expresión obtenida. Y la ecuación resultante se resuelve por los métodos adecuados. Este método es el más usado.
- *Método de igualación*: Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas. Y resolvemos por los métodos adecuados la ecuación resultante. Es menos usado.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$

De la 1ª ecuación despejamos por ejemplo la x y nos resulta: $x=4-y$

Sustituimos en la 2ª ecuación, $(4-y)^2+y^2=40$ →(desarrollamos) $16-8y+y^2+y^2=40$ →(agrupamos *y* tenemos una ecuación de 2º grado en y) $2y^2-8y-24=0$ →(simplificamos por 2) $y^2-4y-12=0$ →(resolvemos la ecuación de 2º grado) $y=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot1}$ →→ $y=\dfrac{4\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\dfrac{4\pm8}{2}=\begin{cases} y_1=6 \\ y_2=-2 \end{cases}$

Estos valores de *y* nos conducen a las soluciones del sistema calculando sus correspondientes *x*:

$y_1=6$ → $x_1=4-6=-2$ → $\boxed{x_1=-2,\ y_1=6}$ Esta es una solución del sistema, un par de valores

$y_2=-2$ → $x_1=4-(-2)=6$ → $\boxed{x_1=6\ \ y_1=-2}$ Esta es la otra solución del sistema, un par de valores

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} x^2+y=x+1 \\ 2x^2+y=3 \end{cases}$

Vamos a hacerlo por igualación (se puede hacer perfectamente por sustitución también). Despejamos la *y* de las dos ecuaciones $\begin{cases} y=-x^2+x+1 \\ y=-2x^2+3 \end{cases}$ Igualamos ahora las dos expresiones de *y* que tenemos:

$-x^2+x+1=-2x^2+3$ Y resolvemos esa ecuación de 2º grado:

$$-x^2+x+1+2x^2-3=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

Para cada valor de *x* calculamos su correspondiente *y* usando cualquiera de las dos expresiones despejadas:

$$x_1=1 \rightarrow y_1=-2\cdot 1^2+3=-2+3=1 \rightarrow \boxed{x_1=1,\ y_1=1}$$

$$x_1=-2 \rightarrow y_1=-2\cdot(-2)^2+3=-8+3=-5 \rightarrow \boxed{x_1=-2,\ y_1=-5}$$

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un ***sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas*** es toda expresión del tipo (las incógnitas tienen grado 1):

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m \end{cases}$$

Llamamos:

- ***Coeficientes del sistema*** a los números reales a_{ij}
- ***Términos independientes*** a los números reales b_i
- ***Incógnitas*** a los x_j que deben ser calculados

La primera ecuación se denota E_1, la segunda con E_2 y así sucesivamente.

La **solución de un sistema** es cada uno de los conjuntos de números S_1, S_2,..., S_n que, sustituidos en las incógnitas correspondientes, verifican todas y cada una de las igualdades.

Resolver un sistema es encontrar las posibles soluciones del mismo, es decir, los valores que pueden tomar las incógnitas de manera que se verifican simultáneamente las *m* ecuaciones.

<u>*Ejemplos*</u>:

a) $\begin{cases} 2x-3y = 2 \\ -5x+3y = -5 \end{cases}$ es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

b) $\begin{cases} x_1-3x_2=0 \\ 2x_1-x_2=1 \\ x_1+2x_2=4 \end{cases}$ es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 2 incógnitas

c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$ es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

<u>TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DE SUS SOLUCIONES</u>

a) *<u>Incompatibles</u>*: Son aquellos que no tienen solución

$\begin{cases} 2x-3y = 2 \\ 2x-3y = -5 \end{cases}$ es un sistema incompatible.

b) *<u>Compatibles</u>*: Son aquellos que tienen solución

- *<u>Compatibles determinados</u>*: Cuando la solución es única.

  $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ es compatible determinado. Su única solución es $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

- *<u>Compatibles indeterminados</u>*: Cuando tienen infinitas soluciones.

  $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$ es compatible indeterminado. Son soluciones $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$, etc.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son ***equivalentes*** si tiene las mismas soluciones.

Podemos hacer cambios en un sistema de ecuaciones aplicando los siguientes criterios de equivalencia:

<u>Criterios de equivalencia</u>

1: Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.

$\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-4y+3=-6+3 \\ 2x+4y-5y=16-5y \end{cases} \Rightarrow$ x = 2, y = 3

2: Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.

$\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot(3x-4y)=-6\cdot 3 \\ \dfrac{2x+4y}{2}=\dfrac{16}{2} \end{cases} \Rightarrow$ x = 2, y = 3

3: Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.

$\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y+3x-4y=16-6 \end{cases} \Rightarrow$ x = 2, y = 3

4: Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ \dfrac{2x+4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + x + 2y = -6 + 8 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Longrightarrow x = 2, \quad y = 3$$

5: Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \Longrightarrow x = 2, \; y = 3$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -4y + 3x = -6 \\ 4y + 2x = 16 \end{cases} \Longrightarrow x = 2, \; y = 3$$

Recordemos ahora los métodos de resolución para sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

1: <u>*Método de sustitución*</u>

<u>*Ejemplo – teórico*</u>: Resolver por sustitución el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

(a) Despejamos una incógnita (la que queramos) de una de las ecuaciones, en este caso de la 2ª ecuación, la "x".

$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 7 - 3y \qquad \text{(hemos elegido la más fácil de despejar)}$$

(b) Sustituimos el valor de la incógnita despejada en su lugar en la otra ecuación

$$3x - 2y = 10 \Rightarrow 3\cdot(7 - 3y) - 2y = 10$$

(c) Resolvemos la ecuación obtenida en (b)

$$3\cdot(7-3y) - 2y = 10 \Rightarrow 21 - 9y - 2y = 10 \Rightarrow -9y - 2y = 10 - 21 \Rightarrow -11y = -11 \Rightarrow 11y = 11 \Rightarrow y = 1$$

(d) Volvemos a la ecuación de la incógnita despejada al principio, para calcular el valor de esa incógnita

$$x = 7 - 3y \Rightarrow x = 7 - 3\cdot 1 \Rightarrow x = 7 - 3 \Rightarrow x = 4$$

(e) Dar la solución

$x = 4$	$y = 1$

<u>**Ejercicio**</u>: Resolver por sustitución los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x + y = -8 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$

2: *Método de igualación*

Ejemplo – teórico: Resolver por igualación el sistema $\begin{cases} -2x+3y &= 5 \\ 4x+y &= 4 \end{cases}$

(a) Despejamos la misma incógnita (la que resulte más cómoda) de las dos ecuaciones. En este sistema vamos a despejar la incógnita $"y"$

$$\begin{cases} -2x+3y=5 & \Rightarrow \quad 3y=5+2x \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{5+2x}{3} \\ 4x+y=4 & \Rightarrow \quad y=4-4x \end{cases}$$

(b) Igualamos las expresiones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{5+2x}{3} \\ y=4-4x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5+2x}{3}=4-4x$$

(c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{5+2x}{3}=4-4x \Rightarrow \frac{5+2x}{3}=\frac{12-12x}{3} \Rightarrow 5+2x=12-12x \Rightarrow 2x+12x=12-5 \Rightarrow 14x=7$$

$$\Rightarrow x=\frac{7}{14} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

(d) Calculamos la otra incógnita sustituyendo el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las dos expresiones obtenidas al principio, en (a), se elige la más fácil.

$$y=4-4x \Rightarrow y=4-4\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y=4-2 \Rightarrow y=2$$

(e) Se da la solución: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=2$

Ejercicio: Resolver por igualación los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x+y &= -8 \\ 4x+5y &= 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y &= 6 \\ 5x+2y &= 10 \end{cases}$

3: *Método de reducción*

Este método lo vamos a estudiar por separado dada su potencia.

6. MÉTODO DE GAUSS O DE REDUCCIÓN

El método de Gauss es una generalización del método de reducción y consiste en transformar un sistema dado en otro equivalente de manera que sea triangular y muy fácil de resolver. Este método es el más usado para sistemas de más de dos incógnitas y vamos a ver cómo funciona con un ejemplo práctico

Ejemplo – teórico: Vamos a resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$

Observamos que tenemos 3 ecuaciones que las identificamos por E_1, E_2 y E_3

$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Longrightarrow$ Cambiamos o permutamos la E_1 la E_2. Lo notaremos por $E_1 \leftrightarrow E_2$ $\Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Longrightarrow$ A la E_2 le restamos el doble de la ecuación E_1. Lo notaremos por: $E_2 \leftrightarrow E_2 - 2E_1$

$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ (2x+y-z)-2\cdot(x-y+2z)=0-2\cdot 5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ Operamos y obtenemos una nueva E_2 donde no aparece ya la incógnita x $\Longrightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3y-5z=-10 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ A la E_3 le restamos la E_1 $\Longrightarrow$ $E_3 \leftrightarrow E_3 - E_1$

$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3y-5z=-10 \\ 2y-z=-2 \end{cases} \Longrightarrow$ Ya tenemos la x triangulada. Ahora con la y hacemos lo mismo, pero sólo con la E_2 y la E_3 Multiplicamos por 2 la E_2 y por 3 la E_3. Lo notamos como $E_2 \leftrightarrow 2E_2$ $E_3 \leftrightarrow 3E_3$ $\Longrightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 6y-10z=-20 \\ 6y-3z=-6 \end{cases}$

Ahora efectuamos los siguiente $E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2$ $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 6y-10z=-20 \\ 7z=14 \end{cases}$ Simplificamos la E_2 $E_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}E_2$ $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3y-5z=-10 \\ 7z=14 \end{cases}$

Ya podemos calcular *z* de la E_3 $\boxed{z=\frac{14}{7}=2}$

En la E_2 sustituimos *z* y calculamos y $3y-10=-10 \rightarrow \boxed{y=0}$

En la E_1 sustituimos *y* y *z* para calcular *x* $x-0+4=5 \rightarrow \boxed{x=1}$

La solución del sistema es: $\boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}}$

Ejemplo – teórico: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \to E_2-3\cdot E_1} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -5y+7z=38 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to E_3-2\cdot E_1}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -5y+7z=38 \\ -7y+7z=28 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to \frac{1}{7}E_3} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -5y+7z=38 \\ -y+z=4 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \to E_3} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -y+z=4 \\ -5y+7z=38 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 \to -5E_2} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 5y-5z=-20 \\ -5y+7z=38 \end{cases} \xrightarrow[E_2 \to \frac{1}{5}E_2]{E_3 \to E_3+E_2} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ y-z=-4 \\ 2z=18 \end{cases} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ \Rightarrow y-z=-4 \\ z=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ y-9=-4 \Rightarrow y=5 \\ z=9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+10-27=-16 \\ y=5 \\ z=9 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ z=9 \end{cases}}$$

<u>Ejemplo – teórico</u>: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ x-z=3 \end{cases}$

7. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES

Pasos a seguir en la resolución de problemas con ecuaciones:

a. Comprender el problema (leerlo tantas veces como sea necesario)
b. Elegir la incógnita o incógnitas
c. Plantear las ecuaciones
d. Resolver la ecuación o sistema
e. Comprobar las soluciones obtenidas, desechando aquellas que carecen de sentido en el contexto del problema

<u>Ejemplo</u>: Un hijo tiene 30 años menos que su padre y éste tiene cuatro veces la edad del hijo. ¿Qué edad tienen cada uno?

Vamos a plantearlo con dos incógnitas: $\begin{cases} x = \text{edad del hijo} \\ y = \text{edad del padre} \end{cases}$

Planteamos las relaciones entre ellas: $\begin{cases} x = y - 30 \\ y = 4\text{x} \end{cases}$ Y ahora resolvemos, en este caso lo más fácil es sustitución:

$$\begin{cases} x = 4x - 30 \\ y = 4\text{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = -30 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 10 \\ y = 40 \end{cases}}$$

<u>*Ejemplo*</u>: Pedro tiene 335 € en billetes de 5€ y de 10€; si en total tiene 52 billetes, ¿cuántos tiene de cada clase?

Vamos a plantearlo con una sola incógnita (se puede hacer con dos) Supongamos que:

x = nº de billetes de 5 €, por tanto, el nº de billetes de 10 € es *(52-x)*

Así que: $5x + 10\cdot(52 - x) = 335 \Rightarrow 5x + 520 - 10x = 335 \Rightarrow -5x = -185 \Rightarrow x = 37$

Tenemos por tanto $\boxed{\begin{cases} 37 \text{ billetes de } 5€ \\ 15 \text{ billetes de } 10€ \end{cases}}$

<u>*Ejemplo*</u>: La suma de las edades de dos personas es 18 años y el producto 77. ¿Qué edad tiene cada una?

Vamos a plantearlo con dos incógnitas: $\begin{cases} x = \text{edad de } 1^{\text{a}} \text{ persona} \\ y = \text{edad de } 2^{\text{a}} \text{ persona} \end{cases}$

Planteamos las relaciones entre ellas: $\begin{cases} x + y = 18 \\ \text{x}\cdot\text{y} = 77 \end{cases}$ Y ahora resolvemos, en este caso lo más fácil es sustitución:

$\begin{cases} y = 18 - x \\ \text{x}\cdot\text{y} = 77 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 18 - x \\ \text{x}\cdot(18 - \text{x}) = 77 \end{cases} \Rightarrow$ Resolvemos la ecuación de 2º grado: $18x - x^2 = 77 \Rightarrow$

$$x^2 - 18x + 77 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \Rightarrow y = 7 \\ x = 7 \Rightarrow y = 11 \end{cases}$$