

UNIDAD 5: INECUACIONES. SISTEMAS DE INECUACIONES

Contenido

1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.....	2
2. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA	3
3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA DE GRADO SUPERIOR A UNO	5
4. INECUACIONES RACIONALES	8

1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Definición: Se llama **desigualdad** a toda relación entre expresiones numéricas o algebraicas unidas por uno de los cuatro signos de desigualdad, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$

Por ejemplo: $4 + 6 < 10$ Falsa $1 + 4 < 8$ Verdadera

$(x-1) \cdot (x-2) \geq 0$ Tenemos que ver que valores de la incógnita la hacen verdadera. A esto se le llama inecuación

Definición: Se llama **inecuación** a aquellas desigualdades en las que se encuentra presente en uno cualquiera de los miembros, o en ambos, una o más variables, o incógnitas.

Ejemplos: Las siguientes desigualdades son inecuaciones

$$4x - 6 < 10 \qquad 2x^4 - x^2 + 3 \geq 3$$

Una inecuación se verifica sólo para algunos valores de las variables.

Los valores numéricos para los cuales se verifica la desigualdad son las soluciones de la misma.

Resolver una inecuación consiste en hallar los valores numéricos para los cuales la desigualdad es verdadera.

Definición: **Inecuaciones equivalentes** son aquellas que tienen las mismas soluciones.

Para hallar inecuaciones equivalentes debemos aplicar los Principios de Equivalencia:

- Si sumamos o restamos a los miembros de una inecuación una misma cantidad o expresión algebraica, la inecuación que resulta es equivalente a la dada. Es decir, podemos pasar términos de un miembro a otro simplemente cambiándole el signo, igual que en las ecuaciones

Ejemplo: $x - 2 \leq 3x - 5 \Rightarrow x - 2 - x + 5 \leq 3x - 5 - x + 5 \Rightarrow 3 \leq 2x$

- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad positiva y no nula, la inecuación que resulta es equivalente a la dada. Es decir, si tenemos un factor positivo en un miembro lo podemos pasar dividiendo o multiplicando al otro miembro de forma análoga a las ecuaciones

Ejemplo: $3x + 2 \leq x - 5 \Rightarrow 3x - x \leq -5 - 2 \Rightarrow 2x \leq -7 \Rightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{-7}{2} \Rightarrow x \leq \frac{-7}{2}$

- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad negativa, la inecuación que resulta es de sentido contrario a la dada. Análogo al anterior, pero al ser negativo el factor hemos de cambiar de sentido a la desigualdad.

Ejemplo: $-6x \leq x - 21 \Rightarrow -6x - x \leq -21 \Rightarrow -7x \leq -21 \Rightarrow \frac{-7x}{-7} \geq \frac{-21}{-7} \Rightarrow x \geq 3$

Definición: Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es una inecuación que se puede transformar en otra equivalente de una de las siguientes formas:

$ax \leq b$	$ax \geq b$
$ax < b$	$ax > b$

Para resolverlas hemos de seguir los pasos similares a las ecuaciones, obteniendo inecuaciones equivalentes y teniendo muy en cuenta que al multiplicar o dividir por un nº negativo hemos de cambiar el signo de la desigualdad.

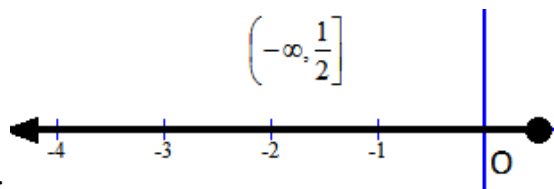
Las soluciones de una inecuación suelen ser intervalos de números reales. Veamos con ejemplos cómo resolverlas:

Ejemplo: Resolver la inecuación $5x - 2 \leq x$

$5x - 2 \leq x \rightarrow$ (Trasponemos las x a un miembro y lo demás a otro) $5x - x \leq 2 \rightarrow 4x \leq 2 \rightarrow$ (Pasamos el 4 dividiendo, como es positivo no pasa nada en la desigualdad) $x \leq \frac{2}{4} \rightarrow$ (Simplificamos) $x \leq \frac{1}{2}$ Las soluciones de la inecuación son todos los números reales menores o iguales que $\frac{1}{2}$, y eso lo ponemos así usando intervalos:

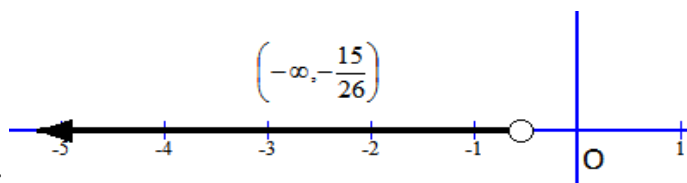
$$\text{Solución} = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$$

y gráficamente sería:



Ejemplo: Resolver la inecuación $\frac{2}{5}x - 1 > 3x + \frac{1}{2} \rightarrow$ (Ponemos común denominador) $\frac{4}{10}x - \frac{10}{10} > \frac{30x}{10} + \frac{5}{10} \rightarrow$ (Eliminamos el denominador) $4x - 10 > 30x + 5 \rightarrow$ (Trasponemos) $4x - 30x > 10 + 5 \rightarrow -26x > 15 \rightarrow$ (Como dividimos por (-26) cambiamos el sentido a la desigualdad) $x < \frac{15}{-26} \rightarrow$ (Ponemos el signo en el lugar adecuado y ya tenemos la solución) $x < -\frac{15}{26}$

Solución = $\left(-\infty, -\frac{15}{26} \right)$ y gráficamente:



2. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Vamos a limitarnos a sistemas de dos inecuaciones con una sola incógnita, que quedan reducidos a expresiones de la

forma:
$$\begin{cases} a_1x < b_1 \\ a_2x < b_2 \end{cases}$$

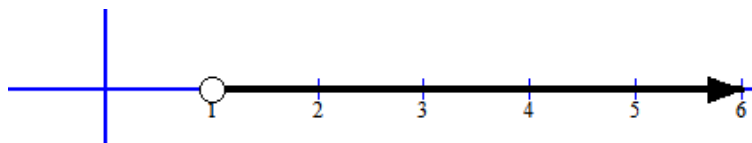
Veamos con ejemplos como se resuelven, que serán aquellos valores que verifican simultáneamente todas las inecuaciones:

Ejemplo: Resolver
$$\begin{cases} \frac{2x-2}{5} + \frac{5-2x}{3} < 1 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{2x-3}{4} > \frac{3}{4} \end{cases}$$
 Lo primero es poner común denominador para eliminar denominadores $\rightarrow$

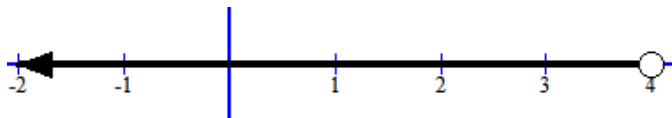
$$\begin{cases} \frac{3 \cdot (2x-2)}{15} + \frac{5 \cdot (5-2x)}{15} < \frac{15}{15} \\ \frac{4 \cdot (x+2)}{12} - \frac{3 \cdot (2x-3)}{12} > \frac{9}{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x-6+25-10x < 15 \\ 4x+8-6x+9 > 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x < -4 \\ -2x > -8 \end{cases} \rightarrow \text{(aquí cambiamos de sentido las}$$

desigualdades pues en ambas dividimos por un nº negativo) $\begin{cases} x > 1 \Rightarrow (1, +\infty) \\ x < 4 \Rightarrow (-\infty, 4) \end{cases}$. Nos salen dos intervalos y la solución es la intersección de ambos, lo vemos gráficamente:

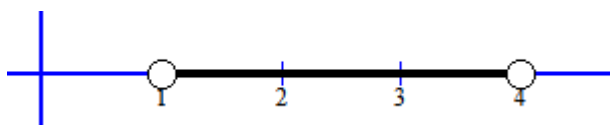
$$(1, +\infty) \rightarrow$$



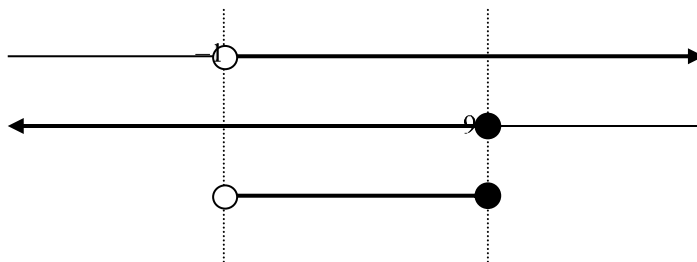
$$(-\infty, 4) \rightarrow$$



La solución es el intervalo común: Solución = $(1, 4)$



Ejemplo: Resolver $\begin{cases} x + 2 > 1 \\ 2x - 5 \leq x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \leq 9 \end{cases}$, los intervalos de solución son $(-1, \infty)$ para la primera y $(-\infty, 9]$ para la segunda. Luego la solución común a ambas está en la intersección de ambos, es decir, en $(-1, 9]$,



gráficamente tal vez se vea mejor.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} (x-2)^2 > (x+3)^2 \\ (x-3) \cdot (x+3) \leq (x-5) \cdot (x+6) \end{cases} \xrightarrow{\text{(operamos)}} \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > x^2 + 6x + 9 \\ x^2 - 9 \leq x^2 + x - 30 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} -10x > 5 \\ 21 \leq x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \Rightarrow (-\infty, -\frac{1}{2}) \\ x \geq 21 \Rightarrow [21, +\infty) \end{cases}$$

Se puede observar fácilmente que no tienen ningún nº real en común, no hay

números reales mayores o iguales que 21 y menores que $-1/2$

Diremos que no tiene solución el sistema.

Ejemplo: Resolver

$$3x < 2x + 6 < 4x$$

En este caso tenemos una doble desigualdad que se transforma en un sistema de dos inecuaciones con dos

incógnitas $\begin{cases} 3x < 2x + 6 \\ 2x + 6 < 4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ -2x < -6 \end{cases} \rightarrow (\text{ojo con los menos}) \begin{cases} x < 6 \Rightarrow (-\infty, 6) \\ x > 3 \Rightarrow (3, +\infty) \end{cases}$

La solución es: Solución = $(3,6)$

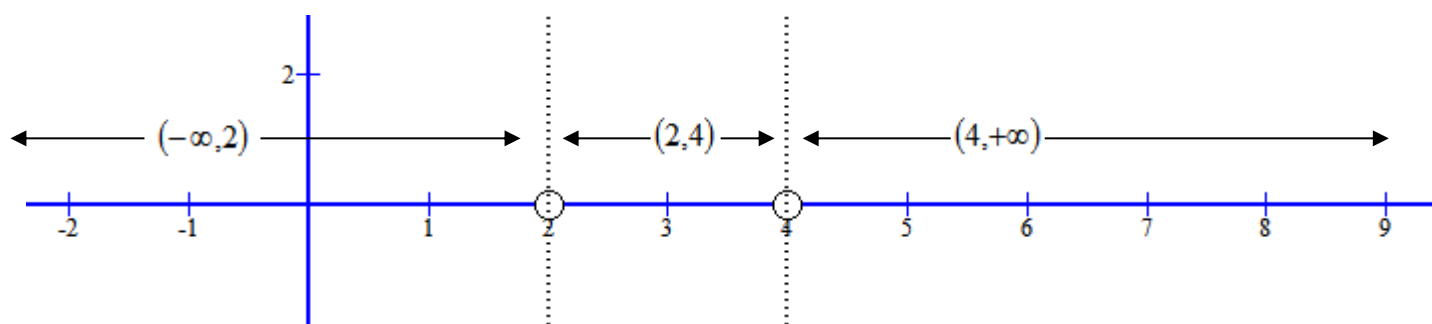
3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA DE GRADO SUPERIOR A UNO

Son inecuaciones donde la incógnita tiene grado mayor a 1. Para resolverlas se calculan primero los valores que anulan a la expresión algebraica (polinomio) y estos valores dividen a la recta real en intervalos donde se mantiene constante el signo. Veamos con ejemplos como se resuelven:

Ejemplo: Resolver la inecuación $x^2 - 6x \geq -8$. Lo primero es dejar la inecuación con uno de los miembros a 0, así nos queda: $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. Consideremos el polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 8$ y veamos donde se anula:

$$P(x) = x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \text{ Estas dos soluciones nos dividen la recta real en tres intervalos, a saber:}$$

$(-\infty, 2)$, $(2, 4)$ y $(4, +\infty)$. Nos fijamos que los intervalos siempre hemos de tomarlos abiertos, ya veremos más adelante que pasa con los extremos, en este caso el 2 y el 4



Ahora hemos de construir una tabla de signos, pues se cumple que en esos intervalos el signo del polinomio

$P(x) = x^2 - 6x + 8$ se mantiene constante, es decir, siempre es positivo o siempre es negativo. Por ello basta elegir un nº real que pertenezca a dichos intervalos y sustituir en el polinomio y el signo que obtengamos se mantiene en todo ese intervalo.

	$(-\infty, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$P(x) = x^2 - 6x + 8$	Calculamos el valor para $x = 0$ que es de este intervalo y resulta $P(0) = +8$ que es positivo. Aquí todas la x van dar positivo	Calculamos el valor para $x = 3$ que es de este intervalo y resulta $P(3) = 9 - 18 + 8 = -1$ que es negativo. Aquí todas la x van dar negativo	Calculamos el valor para $x = 5$ que es de este intervalo y resulta $P(5) = 25 - 30 + 8 = +3$ que es positivo. Aquí todas la x van dar positivo
	+	-	+

No se pueden usar el 2 y el 4 pues al sustituir da 0 y este no tiene signo como sabemos. La inecuación que teníamos era $x^2 - 6x + 8 \geq 0$, es decir, las soluciones son aquellas que lo hacen positivo ó 0, luego son los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(4, +\infty)$, y además hemos de incluir el 2 y el 4 que lo hacen valer 0, por eso serán intervalos cerrados en el 2 y en el 4.

Por tanto, concluimos que la solución es:

$$\text{Solución} = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$

NOTA:

En muchos libros y muchos profesores usan la descomposición en factores del polinomio para hacer la tabla de signos, que en este caso es $P(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ y la tabla queda de la siguiente manera:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$x - 2$	Calculamos para $x = 0$ y sale -2 que es negativo -	Calculamos para $x = 3$ y sale 1 que es positivo +	Calculamos para $x = 5$ y sale 3 que es positivo +
$x - 4$	Calculamos para $x = 0$ y sale -4 que es negativo -	Calculamos para $x = 3$ y sale -1 que es negativo -	Calculamos para $x = 5$ y sale 1 que es positivo +
$P(x) = (x - 2)(x - 4)$	$(-) \cdot (-) = +$	$(+) \cdot (-) = -$	$(+) \cdot (+) = +$

En la última fila multiplicamos los signos correspondientes a cada factor y sale como vemos el mismo resultado.

Ejemplo: Resolver $9 - x^2 > 0$

Vemos donde se anula el polinomio $P(x) = 9 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$. Nos vuelven a salir 3 intervalos y hacemos la

tabla de signos:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$P(x) = 9 - x^2$	Calculamos el valor para $x = -4$ que es de este intervalo y resulta $P(-4) = -7$ que es negativo. Aquí todas la x van dar negativo -	Calculamos el valor para $x = 0$ que es de este intervalo y resulta $P(0) = 9$ que es positivo. Aquí todas la x van dar positivo +	Calculamos el valor para $x = 4$ que es de este intervalo y resulta $P(4) = -7$ que es negativo. Aquí todas la x van dar negativo -

En esta inecuación el signo de desigualdad es mayor estricto ($9 - x^2 > 0$), por tanto los extremos, el 3 y el -3 no son soluciones pues son los que hacen que valga 0.

Concluimos que las soluciones son: $\text{Solución} = (-3, 3)$

Ejemplo: Resolver $x^3 - 2x^2 \leq -x^2 + 2x$

Operamos para dejar un miembro a 0 $\rightarrow x^3 - x^2 - 2x \leq 0$

Vemos donde se anula el polinomio asociado $\rightarrow P(x) = x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow x \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

En este caso al tener 3 soluciones en la ecuación nos aparecen 4 intervalos, que son $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$. Pasamos ya a construir la tabla de signos:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$P(x) = x^3 - x^2 - 2x$	Calculamos el valor para $x = -2$ que es de este intervalo y resulta $P(-2) = -8$ que es negativo. -	Calculamos el valor para $x = -\frac{1}{2}$ que es de este intervalo y resulta $P(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} = 0,625$ que es positivo. +	Calculamos el valor para $x = 1$ que es de este intervalo y resulta $P(1) = -2$ que es negativo. -	Calculamos el valor para $x = 3$ que es de este intervalo y resulta $P(3) = 12$ que es positivo. +

La inecuación era $x^3 - x^2 - 2x \leq 0$, por tanto, las soluciones son donde sale negativo e incluyendo los extremos pues se trata de un menor o igual, así: Solución = $(-\infty, -1] \cup [0, 2]$

En este ejemplo, quizás hubiese sido mejor aplicar la descomposición en factores pues no tenemos que operar con potencias cúbicas ni cuadradas y nos limitamos al final a un producto de signos. Al descomponer en factores el polinomio nos queda la inecuación $x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \leq 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x	-	-	+	+
x+1	-	+	+	+
x-2	-	-	-	+
Producto	-	+	-	+

Ejemplo: Resolver $x^2 - 5x + 8 \geq 0$

En este caso intentamos resolver la ecuación asociada $x^2 - 5x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2}$ que como observamos no tiene solución. Entonces no tenemos intervalos donde ver el signo. El signo se mantiene constante en toda la recta real, y la tabla queda:

	$IR = (-\infty, +\infty)$
$x^2 - 5x + 8$	Probando con $x = 0$ resulta +8 que es positivo

	+
--	----------

La solución es toda la recta real: Solución = $\mathbb{R}$

Ejemplo: Resolver $x^2 - 5x + 8 \leq 0$

Este ejemplo es similar al anterior pero aquí no tiene solución como se puede ver fácilmente, como el hecho en el ejemplo anterior, pues aquí las soluciones serían los negativos.

4. INECUACIONES RACIONALES

Son inecuaciones donde aparece alguna fracción algebraica

Son del tipo $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$ o con los otros signos de desigualdad $\geq, <, >$. Pueden ser también el numerador y el denominador de grado mayor a 1.

Método de resolución: Descomponer factorialmente los polinomios numerador y denominador conociendo sus raíces. Posteriormente se procede como con las inecuaciones de grado mayor que uno, ya que se trata en el fondo de averiguar el signo final que va a tener un cociente de polinomios.

Veamos ejemplos resueltos:

Ejemplo: Resolver $\frac{x}{x-3} \leq 0$ Vemos donde se anulan el numerador y el denominador $\begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

Nos salen dos valores luego tenemos 3 intervalos:

En la tabla de signos podemos hacerlo todo junto o bien separar los signos del numerador y el denominador y después dividirlos. Vamos a hacerlo así ahora:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
x	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
$\frac{x}{x-3}$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$

Por último, nos queda ver si los extremos entran o no.

En $x = 0$ al ser del numerador, hace que la fracción valga $\frac{0}{0-3} = 0$ que tiene sentido al ser la desigualdad menor o igual. Luego $x = 0$ es solución	En $x = 3$ al ser del denominador, hace que la fracción valga $\frac{3}{3-3} = \frac{3}{0}$ que no tiene sentido pues no se puede dividir por 0. Luego $x = 3$ no es solución
--	---

Con ello, deducimos que: Solución = $[0,3)$

Ejemplo: Resolver la inecuación $\frac{x+2}{x^2-x} > 0$

Vemos donde se anulan numerador y denominador:
$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

Tenemos entonces 4 intervalos de posibles soluciones:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+2$	Con $x = -3$ sale -	Con $x = -1$ sale +	Con $x = 0,5$ +	Con $x = 2$ +
x^2-x	Con $x = -3$ sale +	Con $x = -1$ sale +	Con $x = 0,5$ -	Con $x = 2$ +
$\frac{x+2}{x^2-x}$	$\frac{-}{+} = \mathbf{-}$	$\frac{+}{+} = \mathbf{+}$	$\frac{+}{-} = \mathbf{-}$	$\frac{+}{+} = \mathbf{+}$

Por último, los números que anulan el denominador, el 0 y el 1, no son soluciones puesto que no se puede dividir por 0.

Los números que anulan el numerador, en este caso el 2, puede ser solución, pero no lo es pues es una desigualdad estricta (mayor estricto).

Por tanto, las soluciones son:

$$\boxed{\text{Solución} = (-2, 0) \cup (1, +\infty)}$$