

UNIDAD 6: TRIGONOMETRÍA I

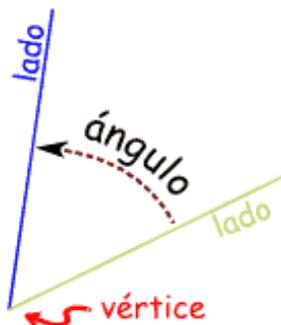
Contenido

1. INTRODUCCIÓN. SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS.....	2
2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS.....	5
3. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA UNIDAD. SEGMENTOS TRIGONOMÉTRICOS.....	7
4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES.....	10
5. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES	15

1. INTRODUCCIÓN. SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

Trigonometría proviene del griego: *trigonos* (triángulo) y *metrón* (medida). También a veces se usa el término Goniometría, que proviene de *gonia* (ángulo). En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomía, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas globales de navegación por satélites.

Definición: Ángulo es la porción del plano limitada por dos semirrectas que tienen un origen común.



Según el sentido del giro decimos que:

- Un ángulo es positivo si el giro para describirlo es de sentido contrario al de las agujas del reloj.
- Un ángulo es negativo si el giro para describirlo es del mismo sentido que el giro de las agujas del reloj.

Los ángulos más conocidos son:

- El giro o ángulo completo.
- El ángulo llano.
- El cuadrante o ángulo recto.

Los ángulos se suelen representar con las letras griegas: α (*alpha*), β (*beta*), γ (*gamma*), ω (*omega*), φ (*phi*)
Para medir ángulos pueden adoptarse distintas unidades. Los sistemas más usados son

a) Sistema sexagesimal

La unidad de medida angular es el *grado sexagesimal*, que es la noventa-ava parte del ángulo recto (ó bien, el ángulo completo son 360° grados sexagesimales) y se simboliza 1° . Cada grado tiene 60 minutos: $1^\circ = 60'$
Cada minuto tiene 60 segundos: $1' = 60''$

A partir de los segundos se usa sistema decimal

Un ángulo llano mide 180° y un giro completo mide 360° . Un ángulo recto son 90°

Ejemplo: Son ángulos $\alpha = 27^\circ 15' 23.14''$, $\beta = -126^\circ 1'$

Operaciones con ángulos en sistema sexagesimal

Veamos mediante ejemplos como se efectúan la suma y diferencia de ángulos, así como el producto por un n° entero o la división por un n° entero.

Ejemplo: Dados los ángulos $\alpha = 57^\circ 35' 23.14''$, $\beta = 67^\circ 59' 43''$ y $\gamma = 25^\circ 50' 44''$, calcular:

a) $\alpha + \beta$

$\alpha =$	57°	$35'$	$23.14''$
$\beta =$	67°	$59'$	$43.00''$
$\alpha + \beta =$	124°	$94' = 1^\circ 34'$	$66.14'' = 1' 6.14''$
$\alpha + \beta =$	125°	$34'$	$66.14'' = 1' 6.14''$
$\alpha + \beta =$	125°	$35'$	$6.14''$

Por tanto, $\alpha + \beta = 125^\circ 35' 6.14''$.

b) $\beta - \alpha$

$\beta =$	67°	$59'$	$43.00''$
$\alpha =$	57°	$35'$	$23.14''$
$\beta - \alpha =$	10°	$24'$	$19.86''$

Por tanto, $\beta - \alpha = 10^\circ 24' 19.86''$. Observamos que todas las cantidades de minutos y segundos del minuendo (β) son superiores a los correspondientes del sustraendo (α), con lo cual se puede realizar la diferencia sin problemas

c) $\alpha - \beta$

En este caso, el nº de grados de β , es mayor que el de α , por tanto el resultado es un ángulo negativo y la forma de proceder es calcular $\beta - \alpha$ y cambiarle el signo, pues $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$. Por tanto por el apartado anterior, como ya lo tenemos hecho, $\alpha - \beta = -10^\circ 24' 19.86''$

d) $\alpha - \gamma$

En este caso los minutos y segundos del minuendo son inferiores a los minutos y segundos del sustraendo, por lo que debemos aumentar los del minuendo para poder realizar la resta.

$\alpha =$	57°	$35'$	$23.14''$
$\alpha =$ (pasamos un grado a minutos)	56°	$95'$	$23.14''$
$\alpha =$ (pasamos un minuto a segundos)	56°	$94'$	$83.14''$
$\gamma =$	25°	$50'$	$44.00''$
$\alpha - \gamma =$ (ya podemos restar)	31°	$44'$	$39.14''$

Por tanto, $\alpha - \gamma = 31^\circ 44' 39.14''$

e) 8α

$\alpha =$	57°	$35'$	$23.14''$
$8\alpha =$	456°	$280'$	$185.12''$
$8\alpha =$ (pasamos minutos a grados)	456°	$280' = 4 \cdot 60' + 40' = 4^\circ + 40'$	$185.12''$
$8\alpha =$ (pasamos segundos a minuto)	460°	$40'$	$185.12'' = 3 \cdot 60'' + 5.12'' = 3' + 5.12''$
$8\alpha =$	460°	$43'$	$5.12''$

Por tanto, $8\alpha = 460^\circ 43' 5.12''$

f) $\frac{1}{5}\beta$

Para hacer la división procedemos como en una división normal y los restos los vamos añadiendo a la unidad inmediatamente inferior

67°	$59'$	$43''$	5
-65°	$120'$		$13^\circ 35' 56.6''$
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: right; padding-right: 20px;">$2^\circ = 120'$ (sumamos)</div> <div style="text-align: right; padding-right: 20px;">$179'$</div> <div style="text-align: right; padding-right: 20px;">$43''$</div> </div>			
	$-175'$	$240''$	
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: right; padding-right: 20px;">$4' = 240''$ (sumamos)</div> <div style="text-align: right; padding-right: 20px;">$283''$</div> </div>			
		$-283''$	
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="width: 20%;"></div> <div style="width: 40%;"></div> <div style="width: 20%;"></div> <div style="width: 20%;"></div> </div> <div style="text-align: center; padding: 10px 0;">0</div>			

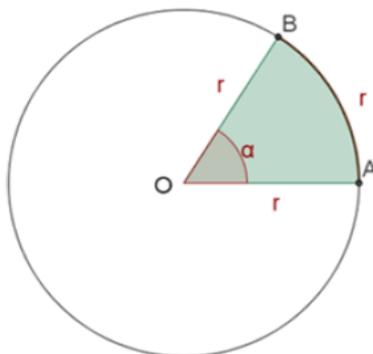
Por tanto, $\frac{1}{5}\beta = 13^\circ 35' 56.6''$

NOTA: Todos estos cálculos se pueden realizar en la calculadora de manera fácil. La calculadora se ha de encontrar en modo DEG

b) El radián

Definición: Un radián es el ángulo cuyo arco mide igual que el radio con el que ha sido trazado.

Como podemos observar en el dibujo, el ángulo α mide 1 radián pues el radio r de la circunferencia coincide con la longitud del arco que determina. Diremos que $\alpha = 1 \text{ rad}$



Como sabemos la longitud de una circunferencia es $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, es decir, el radio se repite $2 \cdot \pi$ veces. Como 1 rad abarca un arco que mide un radio, un ángulo completo (360°) es $2 \cdot \pi$ radianes.

Ya tenemos la primera equivalencia entre los dos sistemas:

$$2 \cdot \pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Ejemplo: Pasar a radianes los siguientes ángulos en sistema sexagesimal:

- a) 180° b) 90°

a) $180^\circ = \frac{360^\circ}{2} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{2} = \pi \text{ rad}$

También se puede hacer mediante una regla de tres simple

b) $90^\circ = \frac{360^\circ}{4} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Construimos una tabla con las equivalencias más importantes:

SEXAGESIMAL	RADIÁN
0°	0
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3 \cdot \pi}{2}$
360°	$2 \cdot \pi$
30°	$\frac{\pi}{6}$

45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
120°	$\frac{2 \cdot \pi}{3}$
135°	$\frac{3 \cdot \pi}{4}$
150°	$\frac{5 \cdot \pi}{6}$
210°	$\frac{7 \cdot \pi}{6}$
225°	$\frac{5 \cdot \pi}{4}$
240°	$\frac{4 \cdot \pi}{3}$
300°	$\frac{5 \cdot \pi}{3}$
315°	$\frac{7 \cdot \pi}{4}$
330°	$\frac{11 \cdot \pi}{6}$

De manera similar se puede pasar de radianes a grados, pero casi siempre nos hará falta el uso de la calculadora.

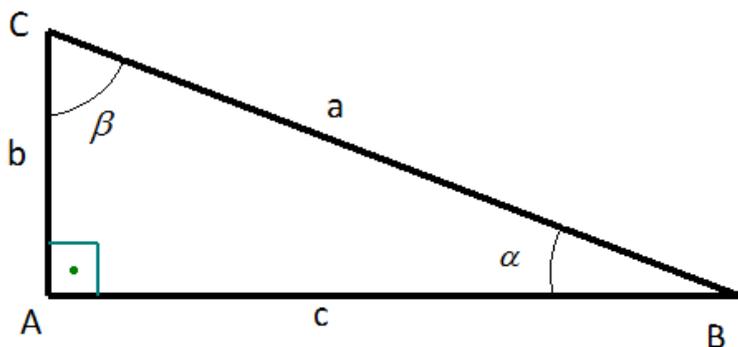
Ejemplo: Pasar a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

- $2 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = (\text{ahora hay que usar la calculadora}) = 114^\circ 35' 29.6''$
- $1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = (\text{ahora hay que usar la calculadora}) = 57^\circ 17' 44.81''$
- $\frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Vamos a usar un triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Sea el triángulo rectángulo siguiente:



En él tenemos que:

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- a es la hipotenusa
- b es el cateto opuesto a α , o bien, el cateto contiguo a β
- c es el cateto opuesto a β , o bien, el cateto contiguo a α

Se definen las razones trigonométricas como sigue:

- <u>SENO</u> $\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$	- <u>COSECANTE</u> $\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } \alpha} = \frac{a}{b}$
- <u>COSENO</u> $\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$	- <u>SECANTE</u> $\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo de } \alpha} = \frac{a}{c}$
- <u>TANGENTE</u> $\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{cateto contiguo de } \alpha} = \frac{b}{c}$	- <u>COTANGENTE</u> $\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo de } \alpha}{\text{cateto opuesto de } \alpha} = \frac{c}{b}$

NOTA: Estas razones dependen sólo del ángulo α y no de las medidas de los lados del triángulo construido

Propiedad: Se cumple que:

a) $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ b) $\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ c) $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$ d) $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$

Demostración:

a) $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg } \alpha$

Las demás son análogas, y las dejo como ejercicio

Propiedad fundamental: Se tiene que: $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$

O bien $\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha$ ó $\text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$

Demostración: Tenemos que

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = (\text{como estamos en un triángulo rectángulo,}$$

$$\text{se verifica el teorema de Pitágoras, luego } a^2 = b^2 + c^2) = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Consecuencias de la propiedad fundamental:

Se verifica que:

a) $1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{sec}^2 \alpha$

Demostración:

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{sec}^2 \alpha$$

b) $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \text{cosec}^2 \alpha$

Demostración:

$$1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

c) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, y $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Ejercicio: Demostrar la siguiente igualdad trigonométrica: $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{\cot^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}$

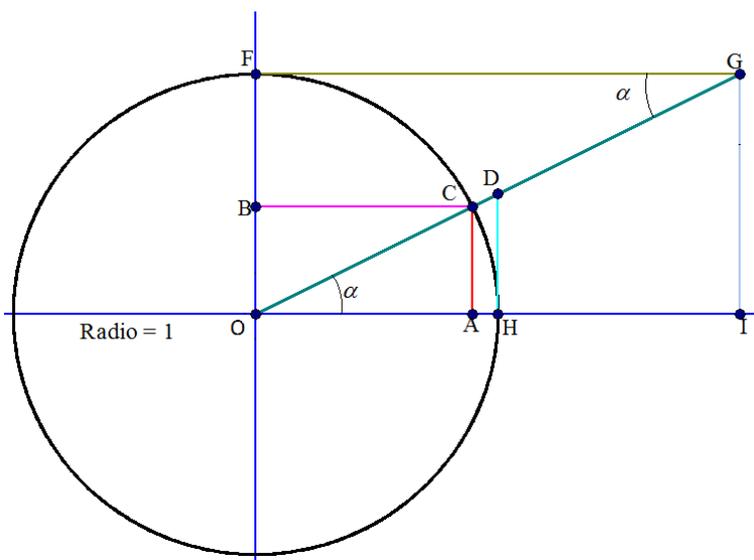
Partimos del segundo miembro y sustituimos por seno y coseno

$$1 - \frac{\cot^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} = 1 - \frac{\cos^2 \alpha / \sin^2 \alpha}{1 / \sin^2 \alpha} = 1 - \frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \text{ con lo cual queda demostrado}$$

3. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA UNIDAD. SEGMENTOS TRIGONOMÉTRICOS

Vamos a considerar una circunferencia de radio 1 y sobre ella dibujamos un ángulo α . Dependiendo del cuadrante donde se encuentre α vamos a ver que segmentos representan las razones trigonométricas y los signos de éstas.

$\alpha \in \text{I CUADRANTE}$



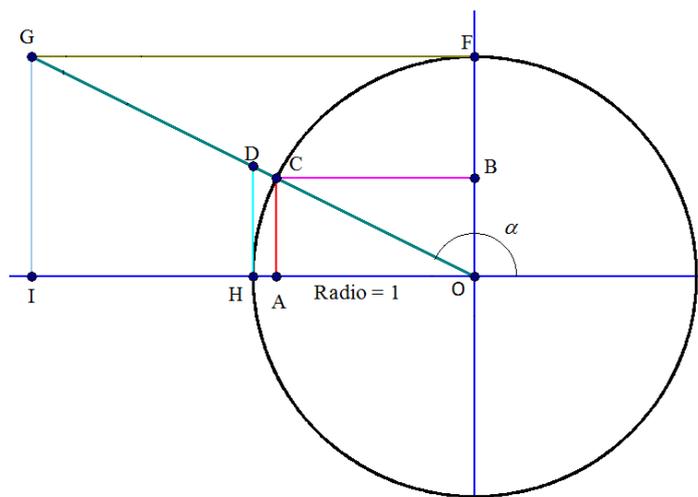
Vemos que:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC} = \overline{OB}. \text{ La distancia } \overline{OB} \text{ es positiva, luego } \sin \alpha \text{ es positivo}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}. \text{ La distancia } \overline{OA} \text{ es positiva, luego } \cos \alpha \text{ es positivo}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{HD}}{1} = \overline{HD}. \text{ Como } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ luego } \operatorname{tg} \alpha \text{ es positiva}$$

$\alpha \in \text{II CUADRANTE}$



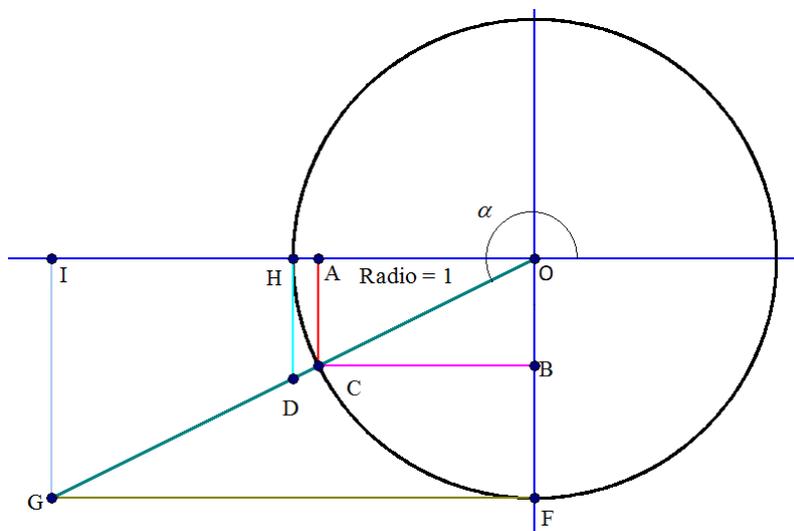
De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$. La distancia \overline{OB} es positiva, luego $\text{sen } \alpha$ es positivo

$\text{cos } \alpha = \overline{OA}$. La distancia \overline{OA} es negativa, luego $\text{cos } \alpha$ es negativo

$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$, luego $\text{tg } \alpha$ es negativa

$\alpha \in \text{III CUADRANTE}$



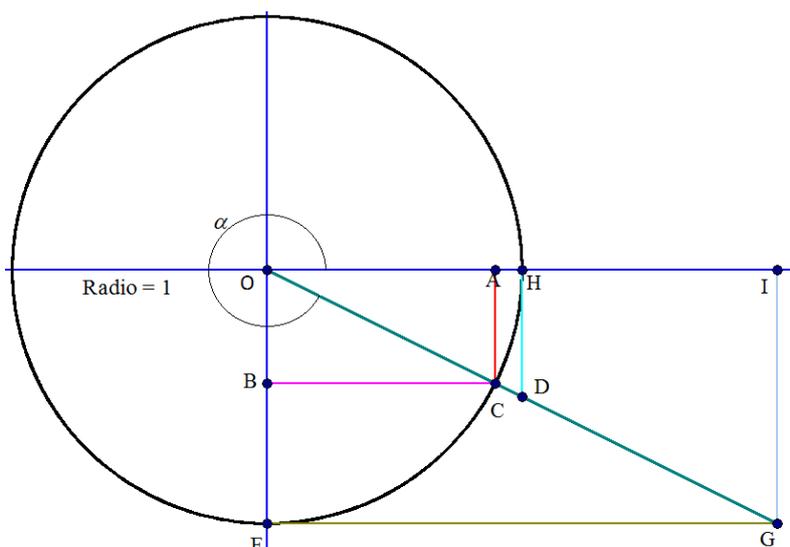
De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$. La distancia \overline{OB} es negativa, luego $\text{sen } \alpha$ es negativa

$\text{cos } \alpha = \overline{OA}$. La distancia \overline{OA} es negativa, luego $\text{cos } \alpha$ es negativo

$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$, luego $\text{tg } \alpha$ es positiva

$\alpha \in \text{IV CUADRANTE}$



De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$. La distancia \overline{OB} es negativa, luego $\text{sen } \alpha$ es negativo

$\text{cos } \alpha = \overline{OA}$. La distancia \overline{OA} es positiva, luego $\text{cos } \alpha$ es positivo

$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$, luego $\text{tg } \alpha$ es negativa

CUADRO RESUMEN DE SIGNOS DEL SENO, COSENO Y TANGENTE

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-

Ejercicio: Sabiendo que un ángulo $\alpha \in \text{II CUADRANTE}$ y que $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$, calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución: Por la igualdad fundamental tenemos que: $\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha \Rightarrow$

$$\text{cos}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como estamos en el II Cuadrante, el coseno es negativo, por tanto, $\text{cos } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ya tenemos el seno y el coseno, por lo cual podemos conocer todas las demás razones:

TANGENTE:

$$tg\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow tg\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ Racionalizamos, } tg\alpha = -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow tg\alpha = -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}, \text{ que sale negativa, como}$$

bien sabemos, pues estamos en el II Cuadrante.

COSECANTE:

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

SECANTE:

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{sec } \alpha = -\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \text{sec } \alpha = -\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

COTANGENTE:

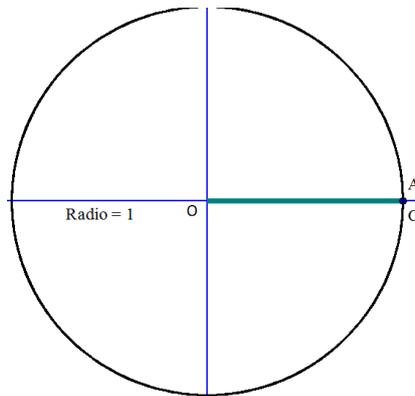
$$\text{cotg}\alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \text{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Vamos a calcular las razones trigonométricas de los ángulos más usados.

a. *Ángulo* $0^\circ = 0 \text{ rad}$

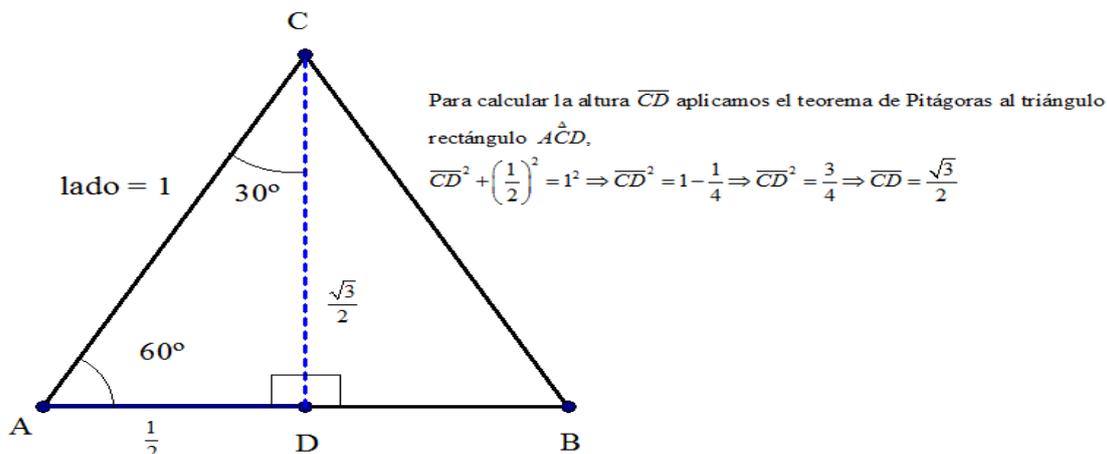
Vamos a basarnos en la circunferencia unidad y sólo cálculos el seno y el coseno y a partir de ellas todas las demás



$\text{sen } 0 = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} =$ <p>(como A y C coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$</p>	$\text{cosec } 0 = \frac{1}{0}$ <p>(diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es ∞) = ∞</p>
$\text{cos } 0 = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \frac{1}{1} = 1$	$\text{sec } 0 = \frac{1}{1} = 1$
$\text{tg } 0 = \frac{0}{1} = 0$	$\text{cotg } 0 = \frac{1}{0} \text{ (diremos que no existe } \neg \exists \text{ o bien que es } \infty) = \infty$

b. Ángulo $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad

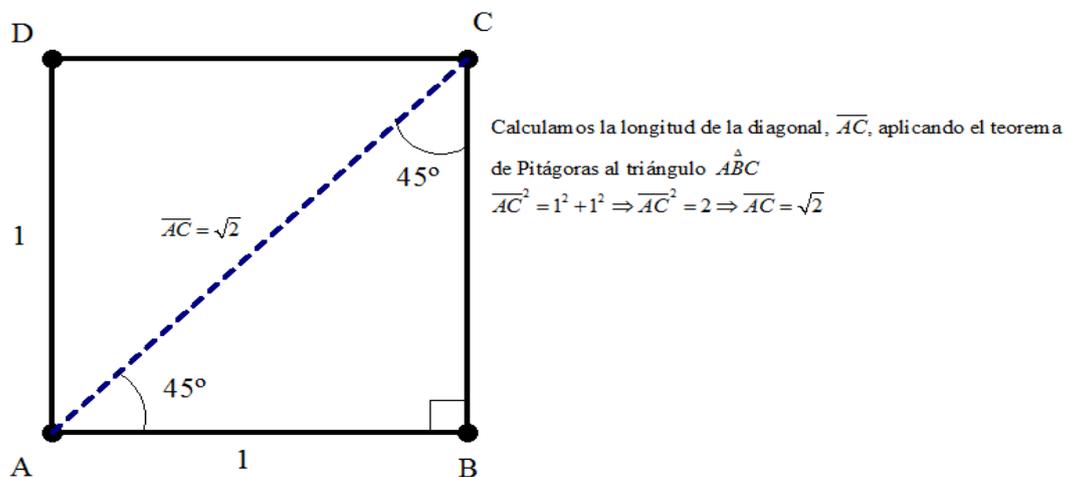
Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad vamos a utilizar un triángulo equilátero de lado 1 como el de la figura siguiente:



$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$	$\text{cosec } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
$\text{cos } \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{sec } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
$\text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{cotg } \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

c. Ángulo $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad

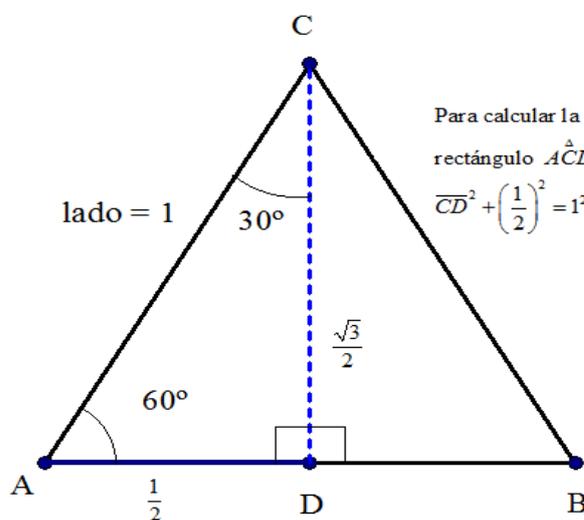
Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad vamos a utilizar un cuadrado de lado 1 como el de la figura siguiente:



$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{cosec } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$
$\text{cos } \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sec } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$
$\text{tg } \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{1} = 1$	$\text{cotg } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} = 1$

d. Ángulo $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad vamos a utilizar un triángulo equilátero de lado 1 como el usado anteriormente:



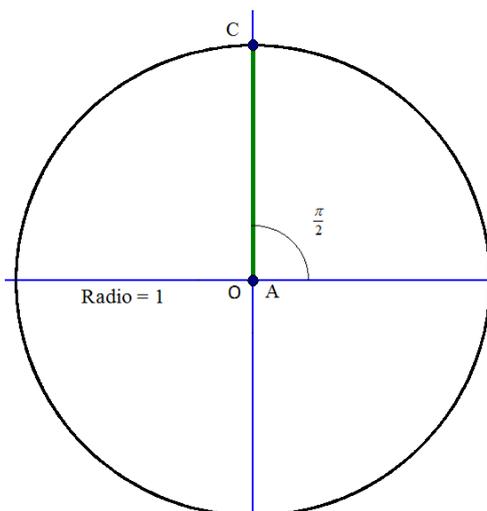
Para calcular la altura \overline{CD} aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle ACD$,

$$\overline{CD}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{CD}^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{cosec } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
$\text{cos } \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$	$\text{sec } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
$\text{tg } \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	$\text{cotg } \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

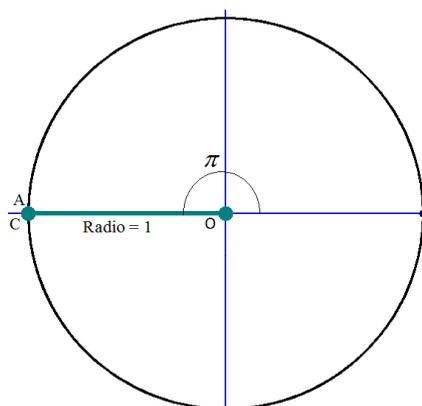
e. Ángulo $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad

Vamos a basarnos en la circunferencia unidad y sólo cálculos el seno y el coseno y a partir de ellas todas las demás



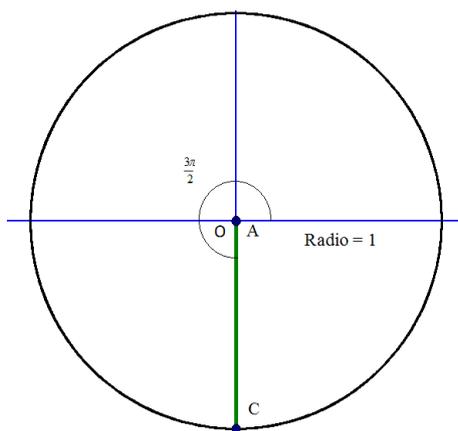
$\text{sen } \frac{\pi}{2} = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} = \frac{1}{1} = 1$	$\text{cosec } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1$
$\text{cos } \frac{\pi}{2} = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}}$ <p>(como A y O coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$</p>	$\text{sec } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ <p>(diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es ∞) = ∞</p>
$\text{tg } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es ∞) = ∞	$\text{cotg } \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$

f. Ángulo $180^\circ = \pi$ rad



$\text{sen } \pi = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}}$ <p>(como A y C coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$</p>	$\text{cosec } \pi = \frac{1}{0}$ <p>(diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es ∞) = ∞</p>
$\text{cos } \pi = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \frac{-1}{1} = -1$	$\text{sec } \pi = \frac{1}{-1} = -1$
$\text{tg } \pi = \frac{0}{1} = 0$	$\text{cotg } \pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es ∞) = ∞

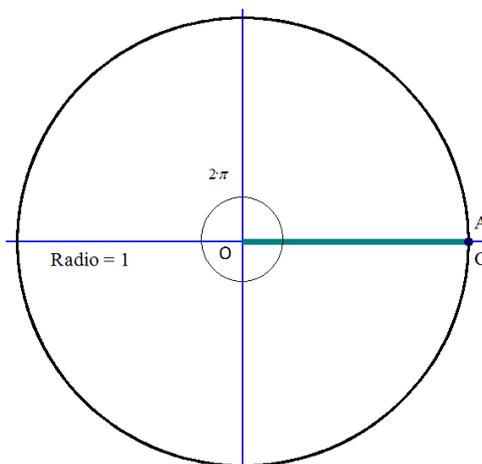
g. Ángulo $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ rad



$\text{sen } \frac{3\pi}{2} = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} = \frac{-1}{1} = -1$	$\text{cosec } \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{-1} = -1$
$\text{cos } \frac{3\pi}{2} = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} =$ (como A y O coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$	$\text{sec } \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) = ∞
$\text{tg } \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) = ∞	$\text{cotg } \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$

h. Ángulo $360^\circ = 2\pi$ rad

Al dar una vuelta completa, las razones son iguales y empiezan a repetirse, luego las razones trigonométricas de 2π rad son iguales a las de 0 rad



$\text{sen } 2\pi = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} =$ (como A y C coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$	$\text{cosec } 2\pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) = ∞
$\text{cos } 2\pi = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \frac{1}{1} = 1$	$\text{sec } 2\pi = \frac{1}{1} = 1$
$\text{tg } 2\pi = \frac{0}{1} = 0$	$\text{cotg } 2\pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) = ∞

Hagamos una tabla resumen con el seno, coseno y tangente de los ángulos notables:

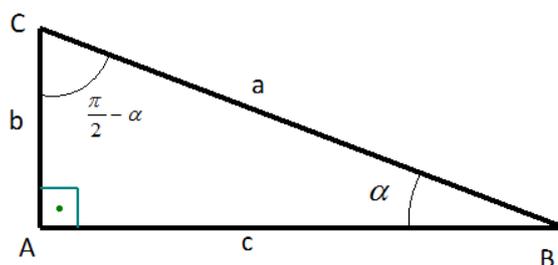
	SENO	COSENO	TANGENTE
$0^\circ = 0 \text{ rad}$	0	1	0
$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	1	0	∞
$180^\circ = \pi \text{ rad}$	0	-1	0
$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	-1	0	∞
$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$	0	1	0

5. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONÓMICAS DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

a. Ángulos complementarios

Son aquellos ángulos cuya suma es 90° . Es decir, si un ángulo es α , su complementario es $90^\circ - \alpha$. O bien, usando radianes, α y $\frac{\pi}{2} - \alpha$, son complementarios.

En este tipo de ángulos el seno de uno es el coseno del otro y viceversa. Y por tanto la tangente y la cotangente también. Se observa fácilmente en la figura siguiente:



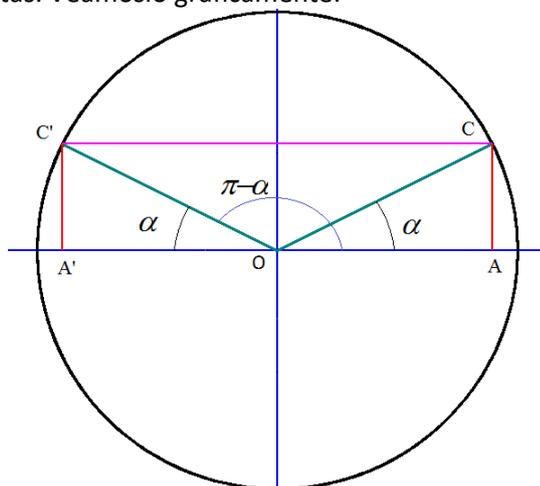
$$\text{Como se observa: } \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{b}{a} \\ \cos \alpha = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{c}{a} \\ \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{b}{c} \end{cases}$$

Ejemplo: Los ángulos de 60° y 30° son complementarios, y como hemos visto ya, el seno de uno es el coseno del otro.

b. Ángulos suplementarios

Son aquellos ángulos cuya suma es 180° . Es decir, si un ángulo es α , su suplementario es $180^\circ - \alpha$. O bien, usando radianes, α y $\pi - \alpha$, son suplementarios.

En este tipo de ángulos los senos coinciden pero los cosenos son opuestos, y por tanto las tangentes también son opuestas. Veámoslo gráficamente:



$$\begin{cases} \operatorname{sen} (\pi - \alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{\text{radio}} = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} = \operatorname{sen} \alpha \\ \cos (\pi - \alpha) = \frac{\overline{OA'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{OA}}{\text{radio}} = -\cos \alpha \\ \operatorname{tg} (\pi - \alpha) = \frac{\operatorname{sen} (\pi - \alpha)}{\cos (\pi - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

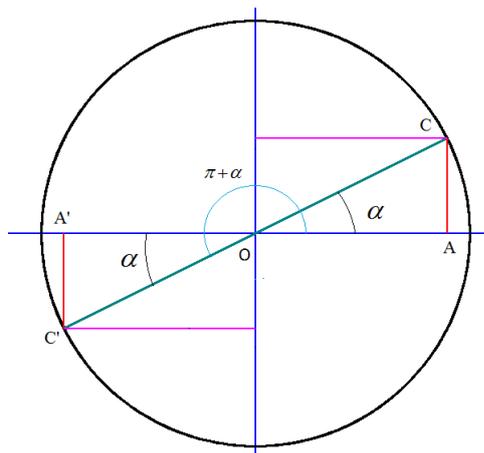
Ejemplo: Calcula las razones trigonométricas de 120°

Nos damos cuenta que 60° es el suplementario de 120° , luego como ya conocemos las de 60° , ya tenemos que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3} \end{cases}$$

c. Ángulos que se diferencian en 180°

Son ángulos de la forma, α y $180^\circ + \alpha$, que si los restamos da 180° . O bien usando radianes, α y $\pi + \alpha$. Estos ángulos tienen el seno y el coseno cambiado de signo, y por tanto la tangente es la misma.



$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) &= \frac{\overline{A'C'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{AC}}{\text{radio}} = -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(\pi + \alpha) &= \frac{\overline{OA'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{OA}}{\text{radio}} = -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi + \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)}{\operatorname{cos}(\pi + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{-\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right.$$

Ejemplo: Calcular la secante, la cosecante y la cotangente de $\frac{5\pi}{4}$ rad

En primer lugar, pasamos el ángulo dado a grados, pues nos puede resultar más fácil.

$\frac{5\pi}{4}$ rad = $\frac{5 \cdot 180^\circ}{4} = 225^\circ$ y ahora nos damos cuenta que 225° y 45° difieren 180° , pues $225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$ o lo

que es lo mismo, $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$. Esto expresado en radianes sería que $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

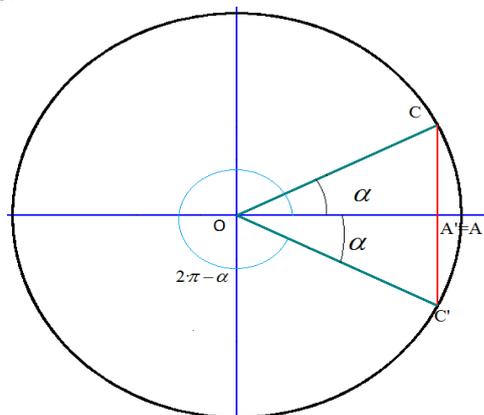
Por tanto, empleando radianes como es el dato del problema,

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} &= -\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \\ \operatorname{cos} \frac{5\pi}{4} &= -\operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sec} \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{cos} \frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \\ \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{aligned} \right.$$

d. Ángulos que suman 360°

Son aquellos ángulos cuya suma es 360° . Es decir, si un ángulo es α , el otro es $360^\circ - \alpha$. O bien, usando radianes, α y $2\pi - \alpha$, suman $2\pi - \alpha$..

En este tipo de ángulos los cosenos coinciden, pero los senos son opuestos, y por tanto las tangentes también son opuestas.



$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) &= \frac{\overline{A'C'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{AC}}{\text{radio}} = -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(2\pi - \alpha) &= \frac{\overline{OA'}}{\text{radio}} = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)}{\operatorname{cos}(2\pi - \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right.$$

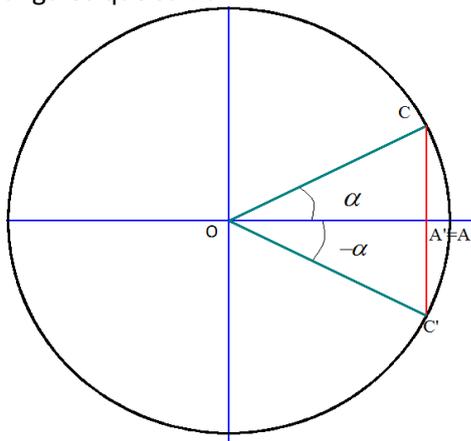
Ejemplo: Calcular la tangente del ángulo de 330°

Nos damos cuenta que 330° y 30° suman 360° , luego aplicando lo anterior, tenemos que

$$\operatorname{tg}(330^\circ) = \frac{\operatorname{sen} 330^\circ}{\operatorname{cos} 330^\circ} = \frac{-\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{cos} 30^\circ} = -\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e. Ángulos opuestos

Son ángulos de signo opuesto, es decir, α y $-\alpha$. Como vemos en el dibujo su comportamiento es análogo al anterior, ángulos que suman 360°



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(-\alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{AC}}{\text{radio}} = -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(-\alpha) = \frac{\overline{OA'}}{\text{radio}} = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\operatorname{cos}(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \end{array} \right.$$

Ejemplo: Calcular el coseno de $-\frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{cos}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f. Ángulos que se diferencian en un n° enteros de vueltas

Son ángulos que superan los 360° o inferiores a -360° , es decir, realizan vueltas completas. Son de la forma $\alpha + k \cdot 360^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$ o bien $\alpha + k \cdot 2\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si es en radianes. Se suele poner como $\alpha + 2 \cdot k \cdot \pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Hay que dividir el ángulo dado por 360 , y el cociente es el n° de vueltas y el resto es el ángulo con el coinciden todas las razones trigonométricas. Las razones coinciden con la de α

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha \end{array} \right.$$

Ejemplo: Calcular el coseno de 855°

Hacemos la división de 855 entre 360 y nos da de cociente 2 y de resto 135 , es decir, $855^\circ = 135^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Por tanto,

$$\operatorname{cos} 855^\circ = \operatorname{cos}(135 + 2 \cdot 360^\circ) = \operatorname{cos} 135^\circ = (135^\circ \text{ y } 45^\circ \text{ son suplementarios}) = -\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$