UNIDAD 7: **TRIGONOMETRÍA II**

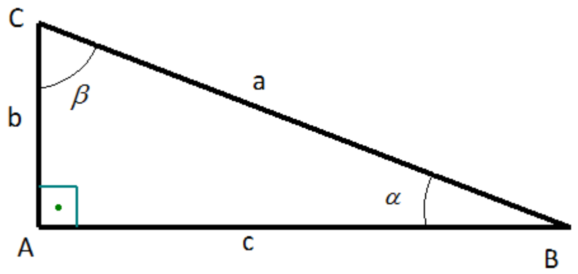
Contenido

1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es conocer la longitud de cada uno de sus lados y la medida de cada uno de sus ángulos.

En el caso de triángulos rectángulos, ya sabemos la medida de uno de sus ángulos, 90^o, el ángulo recto.

Dado un triángulo rectángulo como el de la figura, se cumple que:



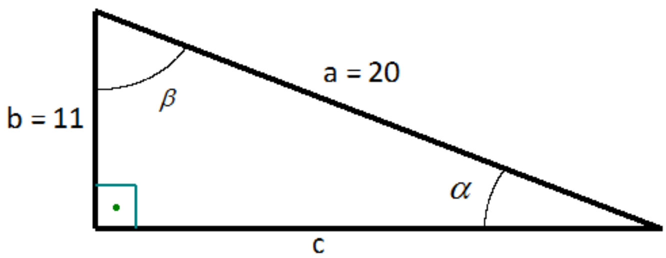
$\alpha+\beta=90^o$

$\text{sen } \alpha = \dfrac{b}{a}$, $\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$, $\text{tg } \alpha = \dfrac{b}{c}$

<u>Teorema de Pitágoras</u>:

$b^2+c^2=a^2$

<u>Ejemplo</u>: En un triángulo rectángulo se conocen un cateto $b=11 \text{ cm}$ y la hipotenusa $a=20 \text{ cm}$. Halla los demás elementos.



Por el teorema de Pitágoras podemos calcular el otro cateto:

$11^2+c^2=20^2 \Rightarrow 121+c^2=400$

$\Rightarrow c^2=279 \Rightarrow c=16'7$

Por la definición de seno, por ejemplo, tenemos que:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{11}{20}=0'55 \Rightarrow$

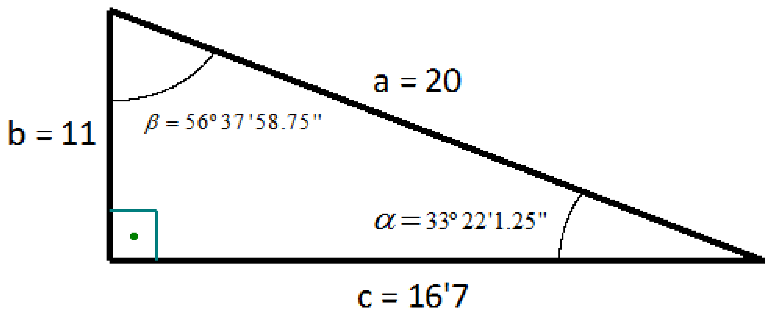
(usando la calculadora) $\alpha=33^o\,22'1.25''$

Por último, como

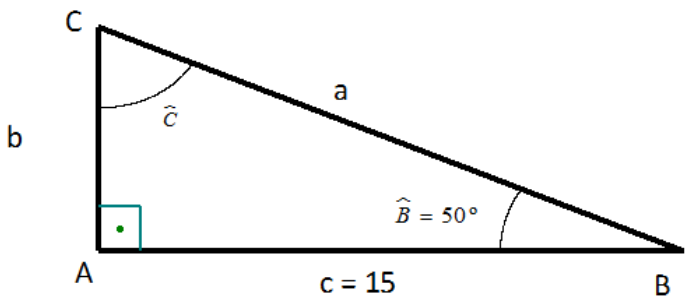
$\alpha+\beta=90^o \Rightarrow 33^o\,22'1.25''+\beta=90^o \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta=56^o\,37'58.75''$

Ya tenemos por tanto nuestro triángulo resuelto:



<u>Ejemplo</u>: En un triángulo rectángulo del que se conocen $B=50^o$, y un cateto $c=15\ cm$, calcula los demás elementos.



Tenemos que:

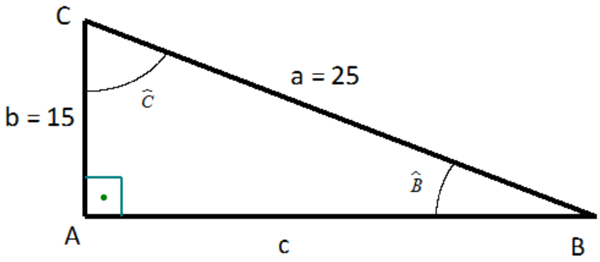
$50^o+C=90^o \Rightarrow C=40^o$

$\text{tg } 50^o=\dfrac{b}{15} \Rightarrow b=15 \cdot \text{tg } 50^o \Rightarrow \text{b} = 17'88 \text{ cm}$

$\cos 50^o=\dfrac{15}{a} \Rightarrow a=\dfrac{15}{\cos 50^o} \Rightarrow a = 23'34 \text{ cm}$

Ejemplo: Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve una carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?

Tenemos una situación como la siguiente:



a = 25 es la longitud de la cinta transportadora
b = 15 es la altura que queremos que eleve el material
B, es lo que queremos calcular.
Por la definición de seno,

$$\text{sen } B = \frac{15}{25} \Rightarrow \text{ (usando la calculadora) } B = 36^\circ 52' 11.63''$$

Ese es el ángulo de inclinación

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

- *Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos*

Se tiene que:

$$\boxed{\text{sen } (\alpha+\beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta}$$

$$\boxed{\cos (\alpha+\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}$$

$$\boxed{\text{tg } (\alpha+\beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}}$$

Ejemplo: Calcula las siguientes razones trigonométricas sin usar calculadora:

a) $\text{sen } 75^\circ = \text{sen } (45^\circ + 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow$

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)$$

b) $\cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

c) $$\text{tg } 75^\circ = \text{tg } (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\text{tg } 45^\circ + \text{tg } 30^\circ}{1 - \text{tg } 45 \cdot \text{tg } 30^\circ} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$\text{tg } 75^\circ = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \Rightarrow (\textit{racionalizamos}) \text{ tg } 75^\circ = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{9-3} \Rightarrow$$

$$\text{tg } 75^\circ = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{6} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \text{tg } 75^\circ = 2+\sqrt{3}$$

- *Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos*

Se tiene que:

$$\boxed{\text{sen } (\alpha-\beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta}$$

$$\boxed{\cos (\alpha-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}$$

$$\boxed{\text{tg } (\alpha-\beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}}$$

Ejemplo: Calcula las siguientes razones trigonométricas sin usar calculadora:

d) $\text{sen } 15^\circ = \text{sen } (45^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow$

$$\text{sen } 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

e) $\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \text{sen } 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)$$

f) $\text{tg } 15^\circ = \text{tg } (45^\circ - 30^\circ) = \dfrac{\text{tg } 45^\circ - \text{tg } 30^\circ}{1 + \text{tg } 45 \cdot \text{tg } 30^\circ} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$

$$\text{tg } 15^\circ = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \Rightarrow (racionalizamos)\, \text{tg } 75^\circ = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{9-3} \Rightarrow$$

$$\text{tg } 15^\circ = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{6} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \text{tg } 15^\circ = 2-\sqrt{3}$$

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

- *Razones trigonométricas del ángulo doble*

Se tiene que:

$$\boxed{\text{sen } (2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\boxed{\cos (2 \cdot \alpha) = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha}$$

$$\boxed{\text{tg } (2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}$$

- *Razones trigonométricas del ángulo mitad*

Se tiene que:

$$\boxed{\text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\text{tg } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}}$$

(Dependiendo del cuadrante donde se encuentre α, tomaremos el signo + o el – correspondiente)

Ejemplo: Sabiendo que $\text{tg } \alpha = \frac{-3}{4}$, y que $\alpha \in II \text{ Cuadrante}$, calcula:

a) $\text{sen } (2\cdot\alpha)$ b) $\cos (2\cdot\alpha)$ c) $\text{tg } (2\cdot\alpha)$ d) $\text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e) $\cos \left(\frac{\alpha}{2}\right)$ f) $\text{tg } \left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Lo primero que vamos a hacer es calcular las razones correspondientes al ángulo α.

Como $1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\left(\frac{-3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \text{(como } \alpha \text{ es del 2º Cuadrante, el + no es válido)} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{4}{5}}$$

Ahora como

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha \cdot \cos \alpha = \text{sen } \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha = \left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right) \Rightarrow \boxed{\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}}$$

a)

$$\text{sen } (2\cdot\alpha) = 2\cdot\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \text{sen } (2\cdot\alpha) = 2\cdot\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \boxed{\text{sen } (2\cdot\alpha) = -\frac{24}{25}}$$

b)

$$\cos (2\cdot\alpha) = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \Rightarrow \cos (2\cdot\alpha) = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \Rightarrow \boxed{\cos (2\cdot\alpha) = \frac{7}{25}}$$

c)

$$\text{tg } (2\cdot\alpha) = \frac{2\cdot\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \Rightarrow \text{tg } (2\cdot\alpha) = \frac{-\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{-\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} \Rightarrow \boxed{\text{tg } (2\cdot\alpha) = -\frac{24}{7}}$$

d) Como $\alpha \in II \text{ Cuadrante} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in I \text{ Cuadrante}$, y con ello podemos elegir bien los signos. Todos son positivos.

$$\text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} \text{ (el } - \text{ no es válido pues es } \alpha \in \text{I Cuadrante)} \Rightarrow$$

$$\text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} \Rightarrow \text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow \text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} \Rightarrow \text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{10}} \Rightarrow$$

$$\text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{(racionalizamos) } \text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

e) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{2}}$ (el $-$ no es válido pues es $\alpha \in$ I Cuadrante) $\Rightarrow$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{10}} \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{(racionalizamos) } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}}$$

f) $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}}$ (el $-$ no es válido pues es $\alpha \in$ I Cuadrante) $\Rightarrow$

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}} \Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}} \Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}} \Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3}$$

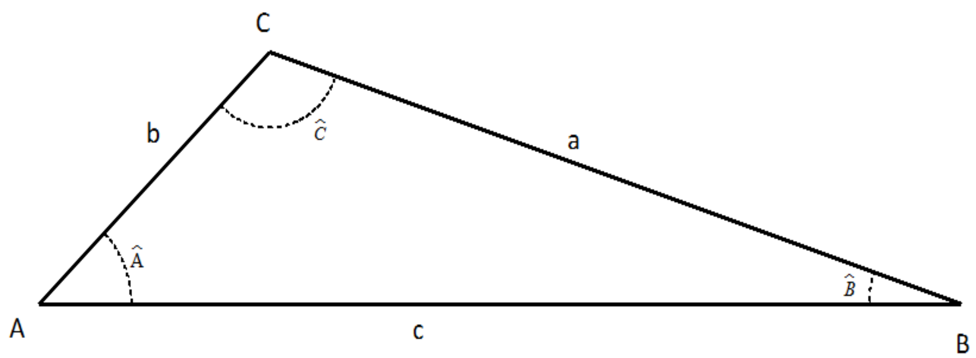
<u>*NOTA*</u>: Podíamos haber calculado la tangente por la definición, de una manera más rápida quizás

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3}$$

4. TEOREMA DE LOS SENOS Y DEL COSENO

Estos teoremas se usan para resolver triángulos que no sean rectángulos. Será necesario el uso de la calculadora.

<u>*Teorema de los senos*</u>: En un triángulo cualquiera como el de la figura, se cumple que:



$$\boxed{\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}}$$

O bien

$$\boxed{\frac{\text{sen A}}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}}$$

Se aplica cuando conocemos:

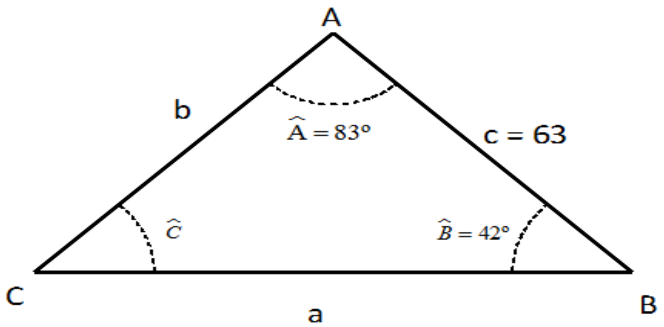
- Dos ángulos y un lado

O bien

- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

A veces puede haber dos soluciones, pues entre 0^o y 180^o hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso.

Ejemplo: En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ conocemos la longitud del lado $c = 63$ m y los ángulos $A = 83^o$ y $B = 42^o$. Resuélvelo.



Hemos dibujado el triángulo, y ahora pasamos a resolverlo.

$A + B + C = 180^o \Rightarrow 83^o + 42^o + C = 180^o \Rightarrow C = 55^o$

Aplicamos ahora el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen } 83^o} = \frac{b}{\text{sen } 42^o} = \frac{63}{\text{sen } 55^o} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\text{sen } 83^o} = \dfrac{63}{\text{sen } 55^o} \\ \dfrac{b}{\text{sen } 42^o} = \dfrac{63}{\text{sen } 55^o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{63 \cdot \text{sen } 83^o}{\text{sen } 55^o} \\ b = \dfrac{63 \cdot \text{sen } 42^o}{\text{sen } 55^o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 76,34 \text{ m} \\ b = 51,46 \text{ m} \end{cases}$$

Ejemplo: Resuelve el triángulo donde conocemos $a = 4$ m, $b = 5$ m y $B = 30^o$

Por el teorema de los senos, $\dfrac{\text{sen A}}{4} = \dfrac{\text{sen } 30^o}{5} = \dfrac{\text{sen } C}{c}$, obtenemos de la primera igualdad que:

$$\frac{\text{sen A}}{4} = \frac{\text{sen } 30^o}{5} \Rightarrow \text{sen A} = \frac{4 \cdot \text{sen } 30^o}{5} \Rightarrow \text{sen A} = 0,4 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 23^o 34'41.44'' \\ A_2 = 156^o 25'18.56'' \end{cases}$$

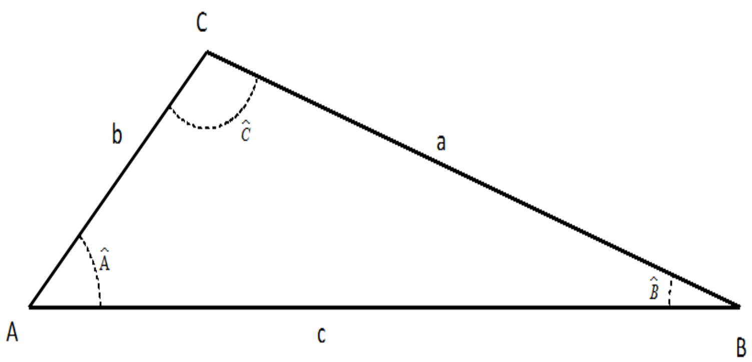
De estas dos posibles soluciones, la solución $A_2 = 156^o 25'18.56''$ no es válida pues en ese caso $A_2 + B + C = 156^o 25'18.56'' + 30^o + C = 180^o$, daría un ángulo C negativo y eso no es posible.

Por tanto $\boxed{A = 23^o 34'41.44''}$, de ahí obtenemos C: $23^o 34'41.44'' + 30^o + C = 180^o \Rightarrow \boxed{C = 126^o 25'18.56''}$

Por último calculamos el lado que nos falta: $\dfrac{\text{sen } 30^o}{5} = \dfrac{\text{sen } 126^o 25'18.56''}{c} \Rightarrow c = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 126^o 25'18.56''}{\text{sen } 30^o} \Rightarrow$

$\boxed{c = 8,05 \text{ m}}$

Teorema del coseno: En un triángulo cualquiera como el de la figura, se cumple que:



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}$$

O bien

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B}$$

O bien

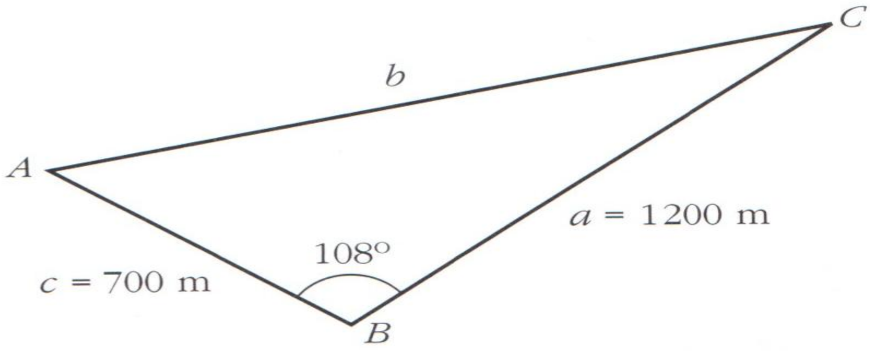
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C}$$

Se aplica cuando conocemos:

- Los tres lados
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
- Dos lados y el ángulo que forman

Se usan conjuntamente los dos teoremas para resolver triángulos.

Ejemplo: Resuelve el triángulo de la figura:



Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado

$b \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos B \Rightarrow b^2 = 1200^2 + 700^2 - 2\cdot 1200\cdot 700\cdot \cos 108^{\circ} \Rightarrow$

$b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2\cdot 1200\cdot 700\cdot \cos 108^{\circ}} \Rightarrow \boxed{b = 1564{,}98 \text{ m}}$

Aplicamos ahora el teorema del seno para calcular el ángulo A

$\dfrac{\text{sen A}}{a} = \dfrac{\text{sen } B}{b} \Rightarrow \dfrac{\text{sen A}}{1200} = \dfrac{\text{sen } 108^{\circ}}{1564{,}98} \Rightarrow \text{sen A} = \dfrac{1200\cdot \text{sen } 108^{\circ}}{1564{,}98} \Rightarrow \text{sen A} = 0{,}729 \Rightarrow \mathrm{A} = \begin{cases} 46^{\circ}\, 49'26'' \\ 133^{\circ} 10'34'' \end{cases}$ Sólo es válida la solución del ángulo agudo, pues con la otra sumarian más de 180° . Por tanto, $\boxed{\mathrm{A} = 46^{\circ}\, 49'26''}$

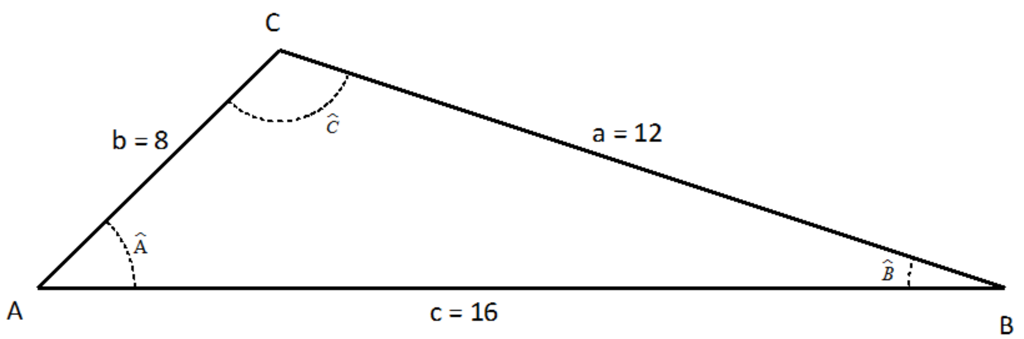
Nos falta calcular $C = 180^{\circ} - 108^{\circ} - 46^{\circ}\, 49'26'' \Rightarrow \boxed{C = 25^{\circ} 10'34''}$

NOTA: El cálculo del ángulo A se podía haber realizado con el teorema del coseno, así:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos \mathrm{A} \Rightarrow 1200^2 = 1564{,}98^2 + 700^2 - 2\cdot 1564{,}98\cdot 700\cdot \cos \mathrm{A} \Rightarrow$

$\cos \mathrm{A} = \dfrac{1564{,}98^2 + 700^2 - 1200^2}{2\cdot 1564{,}98\cdot 700} \Rightarrow \cos \mathrm{A} = 0{,}6842 \Rightarrow \mathrm{A} = 46^{\circ}\, 49'25.37''$. No sale exactamente lo mismo por el efecto de los redondeos

Ejemplo: Resuelve el siguiente triángulo:



Vamos a aplicar el teorema del coseno para calcular el ángulo B

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow 8^2 = 12^2 + 16^2 - 2 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \cos B \Rightarrow 64 = 144 + 256 - 384 \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$64 = 400 - 384 \cdot \cos B \Rightarrow 384 \cdot \cos B = 400 - 64 \Rightarrow \cos B = \frac{336}{384} \Rightarrow \boxed{B = 28^\circ 57' 18.09''}$$

Lo mismo para el ángulo A, aunque también lo podríamos hacer por el teorema del seno, pero tendríamos que tener en cuenta que entonces nos salen dos soluciones y una sería desechable.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \mathrm{A} \Rightarrow 12^2 = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos \mathrm{A} \Rightarrow \cos \mathrm{A} = \frac{8^2 + 16^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 16} \Rightarrow \boxed{\mathrm{A} = 46^\circ 34' 2.87''}$$

Y por último el ángulo C, aplicando que la suma de los tres ángulos ha de ser 180°

$$C = 180^\circ - \mathrm{A} - B \Rightarrow C = 180^\circ - 46^\circ 34' 2.87'' - 28^\circ 57' 18.09'' \Rightarrow \boxed{C = 104^\circ 28' 39.04''}$$

5. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se trata de ecuaciones donde aparecen las razones trigonométricas actuando sobre un ángulo que hay que calcular. El resultado se dará en grados o radianes según el enunciado del problema.

Para resolverlas no hay un método concreto, se trata, pues, de ir aprendiendo con la práctica y los conocimientos adquiridos. Veamos mediante ejemplos como se realiza la resolución

Ejemplo: Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Solución: Preparamos la ecuación, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Dado que el enunciado no especifica nada daremos las soluciones en grados sexagesimales. Una solución como ya sabemos es $x = 60^\circ$, pero tiene más soluciones. Los ángulos suplementarios tienen el seno igual, por tanto otra solución es $x = 120^\circ$

Podríamos terminar diciendo que las soluciones son dos $\begin{cases} x_1 = 60^\circ \\ x_2 = 120^\circ \end{cases}$, pero no sería del todo correcto, pues hay más soluciones. Los ángulos que difieren un nº entero de vueltas ($k \cdot 360^\circ$) tienen las mismas razones trigonométricas, es decir, los ángulos de

$420^\circ = 60^\circ + 1 \cdot 360^\circ, 780^\circ = 60^\circ + 2 \cdot 360^\circ, 480^\circ = 120^\circ + 1 \cdot 360^\circ, 840^\circ = 120^\circ + 2 \cdot 360^\circ, -300^\circ = 60^\circ + (-1) \cdot 360^\circ, \ldots\ldots.$

también tienen por seno $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por tanto, tiene infinitas soluciones, y la forma de expresarlo matemáticamente es:

$\boxed{\begin{cases} x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}}$, donde k es el nº de vueltas que da el ángulo

Este mismo ejemplo, pero dando su solución en radianes sería:

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi \\ x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$, que se suele poner de la siguiente forma: $\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\cdot k\cdot\pi \\ x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}}$

Ejemplo: Resuelve $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solución: Los ángulos cuyo coseno es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y son menores que $2\cdot\pi$ son: $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{7\cdot\pi}{4} \ (\text{suma } 2\cdot\pi \text{ con } \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$ y le hemos de añadir las vueltas, luego:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \\ x_2 + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\cdot\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \\ x_2 = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{7\cdot\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2\cdot k\cdot\pi \\ x_2 = \dfrac{6\cdot\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 2\cdot k\cdot\pi \\ x_2 = \dfrac{3\cdot\pi}{2} + 2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplo: Resuelve

$$\cos 2\cdot x = \cos x + 1$$

Solución: Lo primero que hacemos es convertir la ecuación trigonométrica en una ecuación donde sólo aparezcan el seno o el coseno de x

$$\cos 2\cdot x = \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow 2\cdot\cos^2 x - 1 = \cos x - 1 \Rightarrow$$

$$2\cdot\cos^2 x = \cos x \Rightarrow 2\cdot\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\cdot\left(2\cdot\cos x - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cdot\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \begin{cases} x_1 = 90^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x_2 = 270^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 60^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x_4 = 300^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplo: Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \\ 2\cdot\text{sen } x - \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Solución: Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{cases} \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \\ 2\cdot\text{sen } x - \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow (\text{hacemos } E_2 + E_1) \begin{cases} \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \\ 3\cdot\text{sen } x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \\ \text{sen } x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 + \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \\ \text{sen } x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } y = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen } x = 1 \end{cases}$$ Resolvemos ya cada ecuación:

$$\text{sen } x = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 90^\circ + k\cdot 360^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$$

$$\text{sen y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_1 = 30^\circ + k\cdot 360^\circ \\ y_2 = 150^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación: $\cos x + \sec x = \dfrac{-5}{2}$ con $180^\circ < x < 270^\circ$

Solución: Operamos

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{-5}{2} \Rightarrow \frac{2\cdot\cos^2 x + 2}{2\cdot\cos x} = \frac{-5\cdot \cos x}{2\cdot\cos x} \Rightarrow 2\cdot\cos^2 x + 2 = -5\cdot \cos x \Rightarrow 2\cdot\cos^2 x + 5\cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{-5+3}{4} \\ \cos x = \dfrac{-5-3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{-1}{2} \\ \cos x = -2 \text{ (no existe solución de aquí pues -1} \le \cos x \le 1) \end{cases}$$

Sólo nos queda:

$$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x_2 = 240^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases}$$ De todas estas posibles soluciones, solo hay una que cumple la condición

$180^\circ < x < 270^\circ$ dada por el problema. Luego, la solución es $\boxed{x = 240^\circ}$