UNIDAD 8: **NÚMEROS COMPLEJOS**

Contenido

1. INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES

Cuando se intentan resolver ecuaciones de segundo grado, como por ejemplo $x^2-4x+13=0$, se observa que no tiene soluciones reales $x=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$, pues no existen raíces cuadradas de números negativos en el campo real. Ahora bien, podemos operar con estas expresiones como si se tratara de números reales, así:

$x=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{36\cdot(-1)}}{2}\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}}{2}\Rightarrow x=\frac{4\pm 6\cdot\sqrt{-1}}{2}\Rightarrow x=2\pm 3\cdot\sqrt{-1}$ Y se seguía operando con $\sqrt{-1}$ como si fuera un número real, aunque no lo sea. Leibniz, en el siglo XVII, decía que $\sqrt{-1}$ era una especie de anfibio entre el ser y la nada. Y Euler en el siglo XVIII, el que a $\sqrt{-1}$ le dio el nombre de i, por imaginario, no real. Así diremos que las soluciones de la ecuación de segundo grado anterior son $x=2\pm 3\cdot i$

<u>*Definición*</u>: Llamamos unidad imaginaria al número no real $\sqrt{-1}$ y lo representamos por i. Es decir, $i=\sqrt{-1}$

Se tiene que:

$$\begin{array}{ll} i=\sqrt{-1} & i^5=i^4\cdot i=i \\ i^2=-1 & i^6=i^4\cdot i^2=-1 \\ i^3=i^2\cdot i=-\sqrt{-1}=-i & i^7=i^4\cdot i^3=-i \\ i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1 & i^8=i^4\cdot i^4=1 \end{array}$$

Y así sucesivamente, con lo cual podemos calcular cualquier potencia de i, dividiendo el exponente por 4 y teniendo en cuenta sólo el resto de la división.

<u>*Ejemplo*</u>: Calcula i^{235}.

Dividimos 235 entre 4 y nos sale de cociente 58 y de resto 3, es decir, 235 = 4·58 + 3, luego:

$$i^{235}=i^{4\cdot 58+3}=i^{4\cdot 58}\cdot i^3=\left(i^4\right)^{58}\cdot i^3=1^{58}\cdot(-i)=-i$$

<u>*Definición*</u>: Se define el conjunto de los números complejos y se representa por $\mathbb{C}$ a todas las expresiones de la forma $a+b\cdot i$ donde a y b son números reales e $i=\sqrt{-1}$. Matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbb{C}=\left\{a+b\cdot i \text{ tales que } a,b\in\mathbb{R} \text{ e } i=\sqrt{-1}\right\}$$

La expresión $a+b\cdot i$ se llama <u>**forma binómica**</u> de un número complejo.

A a se le llama <u>**parte real**</u> del nº complejo.

A b se le llama <u>**parte imaginaria**</u> del nº complejo.

A un número complejo se le suele representar por la letra z. Así diremos $z=a+b\cdot i$

<u>*Ejemplo*</u>: $z=3-5\cdot i$ es un número complejo cuya parte real es 3 y la parte imaginaria es -5

<u>*Definición*</u>: Dos números son iguales si y sólo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria, es decir,

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i\Leftrightarrow\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

Propiedad: Los números reales son complejos, es decir, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Pues los números reales son aquellos complejos cuya parte imaginaria vale 0. Por ejemplo, $-\frac{3}{5} = -\frac{3}{5} + 0 \cdot i$

Definición: Los números complejos cuya parte imaginaria no es nula se llaman números **imaginarios**. Por tanto, todos los números complejos son reales o imaginarios.

Definición: Los números imaginarios cuya parte real es 0 se llaman imaginarios puros.

Ejemplo: El nº $3-5 \cdot i$ es imaginario; el nº $\pi \cdot i$ es imaginario puro; el nº $\frac{1-\sqrt{2}}{7}$ es real

Definición: Dado el complejo $z = a + b \cdot i$, se llama **opuesto** de z y se representa por $-z$ al complejo $-z = -a - b \cdot i$

Definición: Dado el complejo $z = a + b \cdot i$, se llama **conjugado** de z y se representa por $\bar{z}$ al complejo $\bar{z} = a - b \cdot i$

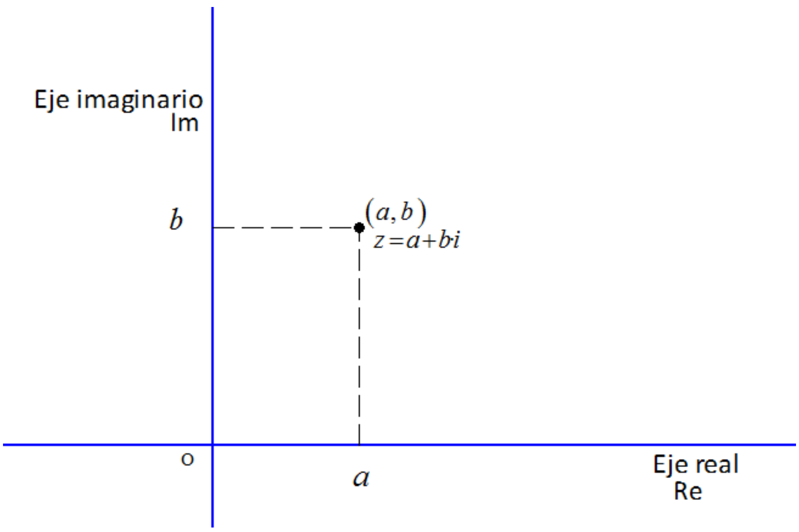
Ejemplo: Dado el complejo $z = \frac{1-5 \cdot i}{8}$, tenemos que podemos ponerlo como $z = \frac{1}{8} - \frac{5}{8} \cdot i$ donde vemos mejor la parte real y la parte imaginaria. Así, su opuesto es $-z = -\frac{1}{8} + \frac{5}{8} \cdot i$ y su conjugado es $\bar{z} = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} \cdot i$

Propiedad: Cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes reales que no tenga soluciones reales, tiene dos soluciones imaginarias que son números complejos conjugados.

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Como sabemos a cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real. Por eso hablamos de recta real. Para representar los números complejos hemos de pasar a un plano, el llamado plano complejo.

Para ello representamos un nº complejo $z = a + b \cdot i$ mediante el punto (a,b). A este punto se le llama **afijo** de $z = a + b \cdot i$



Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 6 = 0$ y representar las soluciones en el plano complejo

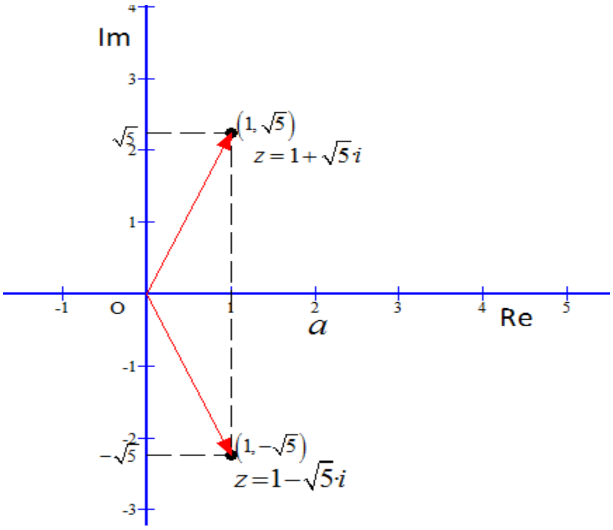
Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado tenemos que:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(6)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4-24}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-20}}{2}\Rightarrow$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{20\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{20}\,i}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{5}\,i}{2}\Rightarrow x=1\pm\sqrt{5}\,i$$

Así, las raíces complejas de la ecuación son: $z_1=1-\sqrt{5}\,i$ y $z_2=1+\sqrt{5}\,i$.

Y su representación gráfica mediante los afijos es:



Como vemos en el dibujo, también se suele usar un vector para representar a los números complejos en el plano.

Es obvio, que los afijos de los números reales se sitúan en el eje real y los afijos de los números imaginarios puros sobre el eje imaginario.

3. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Sean los números complejos $z_1=a+b\cdot i$ y $z_2=c+d\cdot i$, entonces definimos las operaciones:

- <u>Suma y resta de números complejos</u>

$$z_1+z_2=(a+b\cdot i)+(c+d\cdot i)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

$$z_1-z_2=(a+b\cdot i)-(c+d\cdot i)=(a-c)+(b-d)\cdot i$$

- <u>Producto de números complejos</u>

$$z_1\cdot z_2=(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)=a\cdot c+a\cdot d\cdot i+b\cdot c\cdot i+b\cdot d\cdot i^2\Rightarrow\left(\text{como } i^2=-1\right)z_1\cdot z_2=a\cdot c+a\cdot d\cdot i+b\cdot c\cdot i-b\cdot d\Rightarrow$$

$$z_1\cdot z_2=a\cdot c-b\cdot d+\left(a\cdot d+b\cdot c\right)\cdot i$$

<u>*Consecuencia*</u>: El producto de un nº complejo por su conjugado siempre es un número real. Veamos porqué

$$z \cdot \bar{z} = (a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i) = a^2 - a\cdot b\cdot i + b\cdot a\cdot i - b^2\cdot i^2 \Rightarrow \left(\text{como } i^2 = -1\right)\ z\cdot\bar{z} = a^2 + b^2$$

- <u>División de números complejos</u>

Para dividir complejos en forma binómica se multiplica y divide por el conjugado del denominador

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i} = \frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}\cdot\frac{c-d\cdot i}{c-d\cdot i} = \frac{a\cdot c - a\cdot d\cdot i + b\cdot c\cdot i - b\cdot d\cdot i^2}{c^2 - d^2\cdot i^2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{a\cdot c + b\cdot d + \left(b\cdot c - a\cdot d\right)\cdot i}{c^2+d^2}$$

O bien $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a\cdot c + b\cdot d}{c^2+d^2} + \dfrac{\left(b\cdot c - a\cdot d\right)\cdot i}{c^2+d^2}$

<u>NOTA</u>: Estas fórmulas no son necesarias aprenderlas, simplemente conocer cuál es el proceso

<u>Ejemplo</u>: Sean los complejos $z_1 = 2 - 3\cdot i$, $z_2 = \dfrac{3-6\cdot i}{2}$ y $z_3 = -i^3$, se pide:

Antes de nada, vamos a preparar los complejos para que estén en forma binómica:

$$z_2 = \frac{3-6\cdot i}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{3}{2} + \frac{-6\cdot i}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{3}{2} - 3\cdot i\ ; \qquad z_3 = -i^3 \Rightarrow z_3 = -(-i) \Rightarrow z_3 = i$$

a) $z_1 - 5\cdot z_2 + 3\cdot z_3$

$$z_1 - 5\cdot z_2 + 3\cdot z_3 = 2 - 3\cdot i - 5\cdot\left(\frac{3}{2} - 3\cdot i\right) + 3\cdot i \Rightarrow z_1 - 5\cdot z_2 + 3\cdot z_3 = 2 - 3\cdot i - \frac{15}{2} + 15\cdot i + 3i \Rightarrow$$

$$z_1 - 5\cdot z_2 + 3\cdot z_3 = -\frac{11}{2} + 15\cdot i$$

b) $z_1\cdot z_2 - z_1\cdot z_3$

$$z_1\cdot z_2 - z_1\cdot z_3 = \left(2-3\cdot i\right)\cdot\left(\frac{3}{2} - 3\cdot i\right) - \left(2-3\cdot i\right)\cdot i = 3 - 6\cdot i - \frac{9}{2}\cdot i + 9\cdot i^2 - \left(2\cdot i - 3\cdot i^2\right) \Rightarrow$$

$$z_1\cdot z_2 - z_1\cdot z_3 = 3 - 6\cdot i - \frac{9}{2}\cdot i - 9 - \left(2\cdot i + 3\right) = 3 - 9 - 3 - 6\cdot i - \frac{9}{2}\cdot i - 2\cdot i \Rightarrow$$

$$z_1\cdot z_2 - z_1\cdot z_3 = -9 - \left(\frac{12+9+4}{2}\right)\cdot i \Rightarrow z_1\cdot z_2 - z_1\cdot z_3 = -9 - \frac{25}{2}\cdot i$$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_1}{z_3}$ Para operar multiplicamos por los conjugados de los denominadores y desarrollamos

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = \frac{(2-3\cdot i)}{(\frac{3}{2} - 3\cdot i)}\cdot\frac{(\frac{3}{2} + 3\cdot i)}{(\frac{3}{2} + 3\cdot i)} + \frac{(2-3\cdot i)}{i}\cdot\frac{(-i)}{(-i)} = \frac{3 + 6\cdot i - \frac{9}{2}\cdot i - 9\cdot i^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} + \frac{-2\cdot i + 6\cdot i^2}{1} = \frac{12 + \frac{3}{2}\cdot i}{\frac{9}{4} + 9} - 2\cdot i - 6 \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}=\frac{12+\frac{3}{2}\cdot i}{\frac{45}{4}}-2\cdot i-6=\frac{4\cdot\left(12+\frac{3}{2}\cdot i\right)}{45}-2\cdot i-6=\frac{48+6\cdot i}{45}-2\cdot i-6=\frac{48+6\cdot i-90\cdot i-270}{45}\Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}=\frac{-222-84\cdot i}{45}\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}=\frac{-222}{45}+\frac{-84\cdot i}{45}\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}=-\frac{74}{15}-\frac{26\cdot i}{15}$$

4. FORMA TRIGONOMÉTRICA Y FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

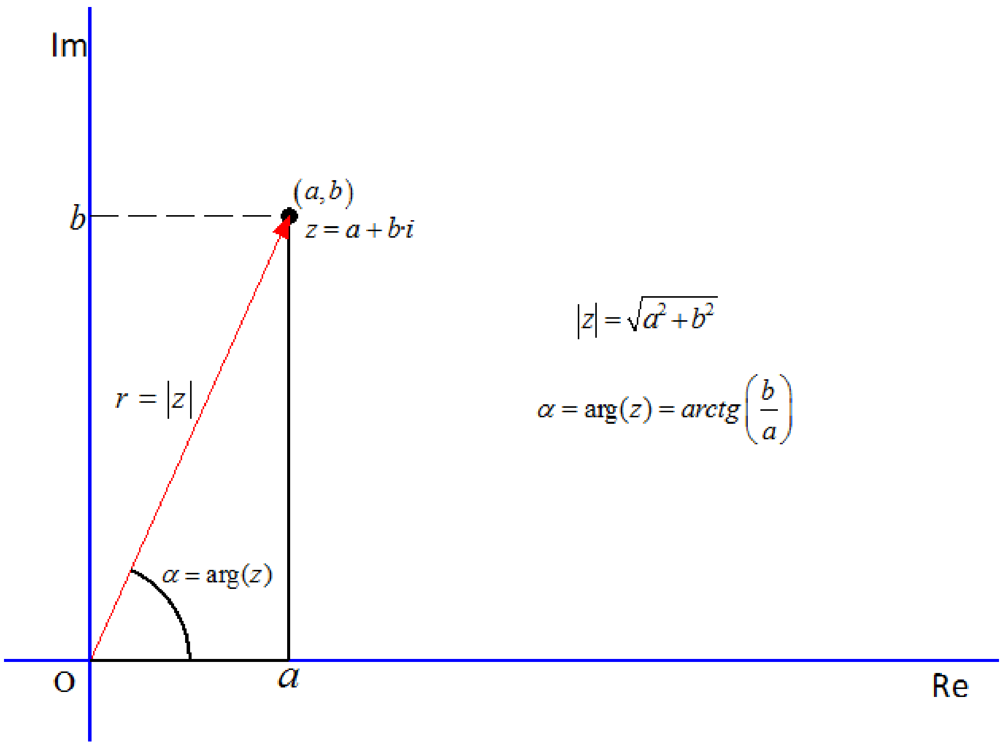
Módulo y argumento de un nº complejo

Sea $z=a+b\cdot i$ un número complejo cualquiera. Llamaremos **módulo** del número complejo z, al número real dado por $\sqrt{a^2+b^2}$ y lo denotaremos por $|z|$. El módulo se interpreta como la distancia al origen del afijo del número z

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Por otra parte, llamaremos **argumento** del número complejo $z=a+b\cdot i$, al ángulo comprendido entre el eje real positivo y el afijo que determina a z. El argumento de z se denota por $\arg(z)$ y se calcula mediante la expresión:

$\arg(z)=arctg\left(\frac{b}{a}\right)$. Hay que tener en cuenta en que cuadrante se encuentra z para calcular el argumento



FORMA POLAR

Definición: Dado un complejo z que tiene por módulo $r=|z|$ y por argumento $\alpha=\arg(z)$, se llama forma polar del complejo z a la expresión $z=r_\alpha$

NOTA: No tiene sentido poner el número 0 en forma polar

Ejemplos: Pasar a forma polar los siguientes complejos. Para ello calculamos el módulo y el argumento de cada complejo

a) $z = 1+\sqrt{3}\cdot i$

Módulo: $r = |z| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$

Argumento: $\alpha = \arg(z) = arctg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi \\ \dfrac{4\cdot\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Este complejo tiene su afijo en el primer cuadrante como fácilmente se puede observar, por tanto, de todas las soluciones posibles nos quedamos con el ángulo que está en el primer cuadrante y es el más simple, pues los demás se obtienen de añadir vueltas. $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Por tanto,

$$z = 1+\sqrt{3}\cdot i = 2_{\frac{\pi}{3}}$$

b) $z = 5-5\cdot i$ Operamos de forma análoga

Módulo: $r = |z| = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{50} \Rightarrow r = 5\cdot\sqrt{2}$

Argumento: $\alpha = \arg(z) = arctg\left(\dfrac{-5}{5}\right) = arctg(-1) \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \dfrac{3\cdot\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi \\ \dfrac{7\cdot\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Este complejo tiene su afijo en el cuarto cuadrante como fácilmente se puede observar, por tanto, de todas las soluciones posibles nos quedamos con el ángulo que está en el cuarto cuadrante y es el más simple, pues los demás se obtienen de añadir vueltas. $\alpha = \dfrac{7\cdot\pi}{4}$

Por tanto,

$$z = 5-5\cdot i = \left(5\cdot\sqrt{2}\right)_{\frac{7\cdot\pi}{4}}$$

c) $z = -2\cdot i$

Módulo: $r = |z| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$

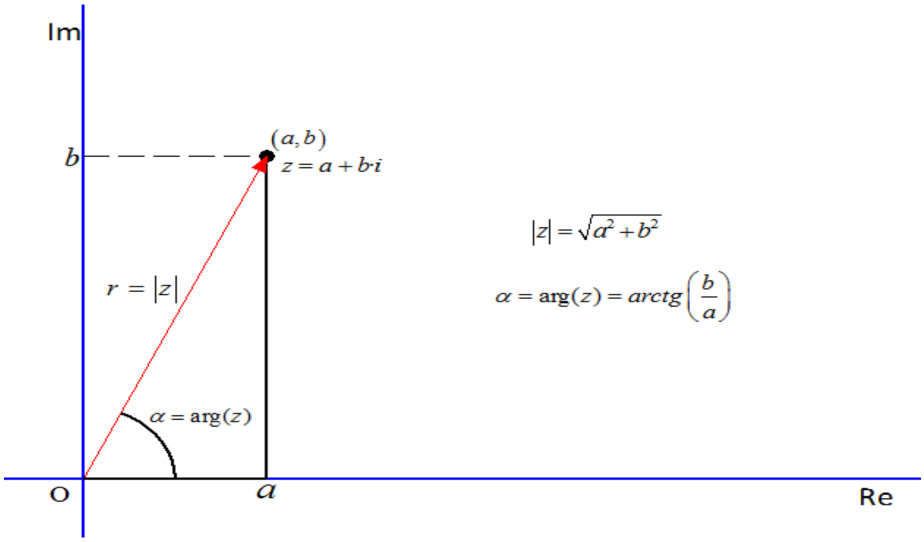
Argumento:

$$\alpha = \arg(z) = arctg\left(\frac{-2}{0}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l}\text{En este caso el complejo esta en el eje imaginario negativo, luego} \\ \text{el argumento es } 270^{\circ}\end{array}\right) \alpha = \frac{3\cdot\pi}{2}.$$

Por tanto, $z = 2_{\frac{3\cdot\pi}{2}}$

FORMA TRIGONOMÉTRICA

Si volvemos al gráfico anterior, es fácil observar por las definiciones trigonométricas que:



$$\cos\ \alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cdot\cos\ \alpha \qquad \text{sen}\ \alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\cdot\text{sen}\ \alpha$$

Por lo que si tenemos un complejo $z = a + b\cdot i$, lo podemos expresar en función de su módulo y su argumento sustituyendo como: $z = r\cdot\cos\ \alpha + r\cdot\text{sen}\ \alpha \cdot i \Rightarrow$ Sacamos factor común r y ponemos i delante del seno

$$z = r\cdot(\cos\ \alpha + i\cdot\text{sen}\ \alpha)$$

que es lo que se conoce como forma trigonométrica de un número complejo

Esta forma nos va a permitir obtener la forma binómica de un complejo que venga dado en forma polar o forma trigonométrica. En realidad, la forma polar y la forma trigonométrica son lo mismo pero expresado de maneras distintas.

Ejemplo: Pasa a forma binómica el complejo $z = 5_{225^{\circ}}$

$$z = 5_{225^{\circ}} = 5\cdot(\cos 225^{\circ} + i\cdot sen 225^{\circ}) \Rightarrow z = 5\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right) \Rightarrow z = -\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot i$$

Ejemplo: Pasa a forma binómica el complejo $z = 1_{\frac{\pi}{2}}$

$$z = 1_{\frac{\pi}{2}} = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot sen\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z = 1\cdot(0 + 1\cdot i) \Rightarrow z = i$$

5. OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA

Los números complejos en forma polar o trigonométrica son muy útiles cuando tenemos que hacer productos, potencias o divisiones. Para las sumas y restas se usan en forma binómica.

Propiedad: Sean $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = r'_\beta$ dos números complejos en forma polar. Entonces se tiene que:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}}$$

O en su forma trigonométrica:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \left[r\cdot(\cos\alpha + i\cdot \mathrm{sen}\,\alpha)\right]\cdot\left[r'\cdot(\cos\beta + i\cdot \mathrm{sen}\,\beta)\right] = r\cdot r'\cdot\left[\cos(\alpha+\beta) + i\cdot \mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)\right]}$$

Ejemplo: Si $z_1 = 2_{30^\circ}$ y $z_2 = 7_{95^\circ}$, entonces $z_1 \cdot z_2 = 2_{30^\circ} \cdot 7_{95^\circ} = (2\cdot 7)_{30^\circ+95^\circ} = 14_{125^\circ}$

Propiedad: Sea $z_1 = r_\alpha$ un número complejo en forma polar. Entonces se tiene que:

$$\boxed{z_1^n = (r_\alpha)^n = (r^n)_{n\cdot\alpha}}$$

O en su forma trigonométrica:

$$\boxed{z_1^n = \left[r\cdot(\cos\alpha + i\cdot \mathrm{sen}\,\alpha)\right]^n = r^n\left[\cos(\mathrm{n}\cdot\alpha) + i\cdot \mathrm{sen}\,(\mathrm{n}\cdot\alpha)\right]}$$

Ejemplo: Si $z_1 = 2_{30^\circ}$, entonces $z_1^5 = \left(2_{30^\circ}\right)^5 = 2^5{}_{5\cdot 30^{\circ\circ}} = 32_{150^\circ}$

Propiedad: Sean $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = r'_\beta$ dos números complejos en forma polar. Entonces se tiene que:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}}$$

O en su forma trigonométrica:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r\cdot(\cos\alpha + i\cdot \mathrm{sen}\,\alpha)}{r'\cdot(\cos\beta + i\cdot \mathrm{sen}\,\beta)} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\cdot \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)\right]}$$

Ejemplo: Si $z_1 = 2_{30^\circ}$ y $z_2 = 4_{75^\circ}$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2_{30^\circ}}{4_{75^\circ}} = \left(\frac{2}{4}\right)_{30^\circ-75^\circ} = \left(\frac{1}{2}\right)_{-45^\circ} = \left(\frac{1}{2}\right)_{315^\circ} = \frac{1}{2}\cdot(\cos 315^\circ + i\cdot sen 315^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

y hemos dado en este ejemplo el resultado en forma binómica

Fórmula de Moivre

Se cumple que: $$(\cos\alpha + i\cdot \mathrm{sen}\,\alpha)^n = \cos(\mathrm{n}\cdot\alpha) + i\cdot \mathrm{sen}\,(\mathrm{n}\cdot\alpha)$$

Que nos puede permitir calcular $\cos(\mathrm{n}\cdot\alpha)$ y $\mathrm{sen}\,(\mathrm{n}\cdot\alpha)$ en función de $\cos\alpha$ y de $\mathrm{sen}\,\alpha$

NOTA: *FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO*

Hay otra forma de representar los complejos llamada forma exponencial, que se obtiene a partir de la fórmula de Euler.

La fórmula de Euler nos dice que: $e^{i\cdot\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

A partir de ella es fácil deducir que un complejo $\boxed{z=r_{\alpha}=r\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)=r\cdot e^{i\cdot\alpha}}$ que son sus forma polar, trigonométrica y exponencial.

Una consecuencia de esta forma es la igualdad: $\boxed{e^{\pi\cdot i}+1=0}$ que como vemos relaciona los números más significativos de las matemáticas conocidos hasta ahora.

6. RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Vamos a ver cómo se calculan raíces n-ésimas de números complejos y también probaremos que cualquier complejo, salvo el 0, tiene n raíces n-ésimas.

Para hacer raíces siempre necesitaremos tener el número complejo en forma polar, por tanto, partimos de un complejo $z=r_{\alpha}$. Esta es la forma reducida de expresar al complejo, pero el argumento puede ser el ángulo $\alpha+2\cdot k\cdot\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ o bien $\alpha+k\cdot 360^{\circ}$ con $k\in\mathbb{Z}$, pues se diferencian de α en un nº entero de vueltas.

Consideremos por tanto el complejo de esta forma $z=r_{(\alpha+k\cdot 360^{\circ})}$ (se puede poner en radianes si se quiere)

Se trata de calcular la raíz n-ésima de $z=r_{(\alpha+k\cdot 360^{\circ})}\Rightarrow$ Es decir, encontrar $w=\sqrt[n]{z}\Rightarrow w=\sqrt[n]{r_{(\alpha+k\cdot 360^{\circ})}}$

Se tiene que cumplir que: $w^{n}=r_{(\alpha+k\cdot 360^{\circ})}$

Si consideramos $w=R_{\beta}\Rightarrow(\text{tenemos que calcular } R \text{ y } \beta)\Rightarrow\left(R_{\beta}\right)^{n}=r_{(\alpha+k\cdot 360^{\circ})}\Rightarrow {R^{n}}_{n\cdot\beta}=r_{(\alpha+k\cdot 360^{\circ})}$

Si igualamos módulos y argumentos tenemos que: $\begin{cases} R^{n}=r \\ n\cdot\beta=\alpha+k\cdot 360^{\circ}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} R=\sqrt[n]{r} \\ \beta=\dfrac{\alpha+k\cdot 360^{\circ}}{n}\end{cases}$ con $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\boxed{\begin{cases} R=\sqrt[n]{r} \\ \beta=\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{k\cdot 360^{\circ}}{n}\end{cases} \text{con } k\in\mathbb{Z}}$ que son las posibles raíces del complejo $z=r_{\alpha}$

Aparentemente tiene infinitas soluciones, pero esto no es así pues a partir de que $k=n$ lo que hacemos es dar vueltas respecto a las soluciones aportadas por los valores de $k=0,1,\ldots,n-1$. Por ejemplo para $k=n$ sale la misma raíz solución que para $k=0$. Para $k=n+1$ sale la misma que para $k=1$

Por tanto, podemos concluir que las raíces n-ésimas de $z=r_{\alpha}$ $\left(\sqrt[n]{z}\right)$ son los complejos $w=R_{\beta}$ tales que:

$$\boxed{\begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{k \cdot 360^{o}}{n} \end{cases} \text{con } k = 0,1,2,\ldots,n\text{-}1}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcula las raíces cuadradas de i

Se trata de calcular $\sqrt{i}$, que va a tener dos raíces, w_1 y w_2

Pasamos el complejo i a forma polar, lo cual es fácil: $i = 1_{90^{o}}$ (en este caso tenemos $\begin{cases} n = 2 \\ r = 1 \\ \alpha = 90^{o} \end{cases}$)

Las soluciones vendrán dadas por:

$$\begin{cases} R = \sqrt{1} \\ \beta = \dfrac{90^{o}}{2} + \dfrac{k \cdot 360^{o}}{2} \end{cases} \text{con } k = 0,1 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ \beta = 45^{o} + k \cdot 180^{o} \end{cases} \text{con } k = 0,1$$

Para $\boxed{k = 0}$

$$\begin{cases} R = 1 \\ \beta = 45^{o} \end{cases} \Rightarrow w_1 = 1_{45^{o}} \Rightarrow w_1 = 1 \cdot \left(\cos 45^{o} + i \cdot sen 45^{o} \right) \Rightarrow \boxed{w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i}$$

Para $\boxed{k = 1}$

$$\begin{cases} R = 1 \\ \beta = 45^{o} + 180^{o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ \beta = 225^{o} \end{cases} w_2 = 1_{225^{o}} \Rightarrow w_2 = 1 \cdot \left(\cos 225^{o} + i \cdot sen 225^{o} \right) \Rightarrow \boxed{w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcula las raíces cúbicas de -8 y representarlas gráficamente

Se trata de calcular $\sqrt[3]{8}$, que va a tener tres raíces, w_1, w_2 y w_3

Pasamos $z = -8$ a forma polar, calculando su módulo y argumento:

$$r = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} \Rightarrow r = \sqrt{64} \Rightarrow r = 8$$

$$\alpha = arctg(\frac{0}{-8}) \Rightarrow \alpha = arctg(0) \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0^{o} \text{ (no válido pues -8 está en el eje real negativo)} \\ 180^{o} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 180^{o}$$

Por tanto $-8 = 8_{180^{o}}$ (en este caso tenemos $\begin{cases} n = 3 \\ r = 8 \\ \alpha = 180^{o} \end{cases}$)

Las soluciones vendrán dadas por:

$$\begin{cases} R = \sqrt[3]{8} \\ \beta = \dfrac{180^{o}}{3} + \dfrac{k \cdot 360^{o}}{3} \end{cases} \text{con } k = 0,1,2 \Rightarrow \begin{cases} R = 2 \\ \beta = 60^{o} + k \cdot 120^{o} \end{cases} \text{con } k = 0,1,2$$

Para $\boxed{k=0}$

$$\begin{cases} R=2 \\ \beta=60^{o} \end{cases} \Rightarrow w_1=2_{60^{o}} \Rightarrow w_1=2\cdot\left(\cos 60^{o}+i\cdot sen60^{o}\right)\Rightarrow w_1=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\Rightarrow \boxed{w_1=1+\sqrt{3}\cdot i}$$

Para $\boxed{k=1}$

$$\begin{cases} R=2 \\ \beta=60^{o}+120^{o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R=2 \\ \beta=180^{o} \end{cases} w_2=2_{180^{o}} \Rightarrow w_2=2\cdot\left(\cos 180^{o}+i\cdot sen180^{o}\right)\Rightarrow \boxed{w_2=-2}$$

Para $\boxed{k=2}$

$$\begin{cases} R=2 \\ \beta=60^{o}+2\cdot120^{o} \end{cases} \Rightarrow w_3=2_{300^{o}} \Rightarrow w_3=2\cdot\left(\cos 300^{o}+i\cdot sen300^{o}\right)\Rightarrow w_3=2\cdot\left(\frac{1'}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\Rightarrow \boxed{w3=1-\sqrt{3}\cdot i}$$

Representemos ahora las soluciones: